Chapitre 9 - Loi binomiale

Table des matières

La loi binomiale est un outil statistique essentiel en gestion pour modéliser des situations répétitives, comme le contrôle qualité d'un lot de pièces ou le succès d'appels commerciaux.

1. Le schéma de Bernoulli

Avant de comprendre la loi binomiale, il faut définir l'unité de base : l'**épreuve de Bernoulli**.

C'est une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues possibles :

- Le **succès (S)**, avec une probabilité « p ».
- L'**Échec ($\overline{S}$)**, avec une probabilité « q = 1 – p ».

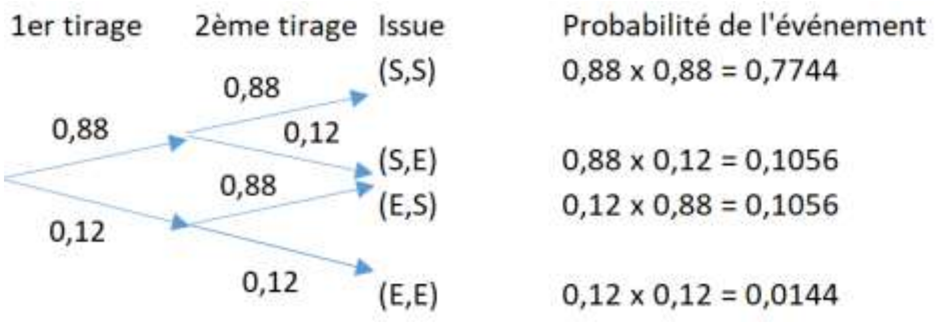
Le Schéma de Bernoulli : On parle de schéma de Bernoulli lorsqu'on répète « n » fois la même épreuve de Bernoulli de manière **identique et indépendante**.

Il est possible de réaliser un arbre de probabilité pour schématiser le tout.

Exemple :

	Atelier	Probabilité
Pièce conforme	880	0,88
Pièce défectueuse	120	0,12
Total	1000	1

Succès (X=1) : La pièce est défectueuse.
Échec (X=0) : La pièce est conforme.



2. Définition de la loi Binomiale

Une variable aléatoire X suit une **loi binomiale** de paramètres « n » (nombre de répétitions) et « p » (probabilité de succès) si elle compte le nombre total de succès obtenus à l'issue des « n » épreuves.

Notation : X~B(n,p)

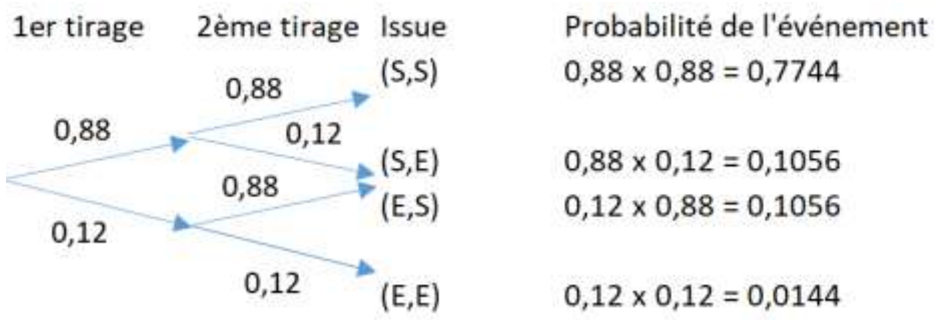
Justification (Examen) : Pour justifier qu'une situation relève de la loi binomiale, vous devez prouver :

1. **Une épreuve de Bernoulli :** Chaque tirage n'a que deux issues (ex: Succès = "Défectueuse", Échec = "Conforme").
2. **La répétition :** On répète l'opération n fois (ex: on tire 10 pièces).
3. **L'indépendance :** Le résultat d'un tirage ne doit pas influencer le suivant (on considère souvent un tirage *avec remise de l'élément pris* ou sur un stock très grand).

Suite de l'exemple :

	Atelier	Probabilité
Pièce conforme	880	0,88
Pièce défectueuse	120	0,12
Total	1000	1

Succès (X=1) : La pièce est défectueuse.
Échec (X=0) : La pièce est conforme.



k	0	1	2
Probabilité d'obtenir k succès	0,0144	0,1056	0,7744

⇨ 1,44% de « chance » de n'avoir aucune pièce conforme ; 10,56% d'avoir une pièce conforme et 77,44% d'avoir 2 pièces conformes après 2 tirages.

La probabilité d'obtenir k succès dans ce schéma de Bernoulli où $n = 2$ est notée $P(X = k)$, où X est la variable aléatoire donnant le nombre de succès.

3. Calculs et représentations

En BTS CG, l'accent est mis sur l'utilisation des outils numériques plutôt que sur les formules complexes.

Calcul des probabilités : Vous devez savoir utiliser votre calculatrice (mode DISTRIB / BINOMIAL) pour calculer P(X = k) ou P(X < k).

Cette formule permet de calculer précisément la probabilité d'obtenir un nombre exact de succès (k) lors d'une répétition d'expériences (n). En **BTS CG**, on l'utilise pour modéliser des risques de pannes, des succès de prospection ou des erreurs de saisie comptable.

Voici la décomposition de la formule :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Pour appliquer cette loi, il faut identifier quatre éléments clés :

- **n** : Le nombre total d'épreuves répétées (la taille de l'échantillon).
- **k** : Le nombre exact de succès que l'on souhaite obtenir.
- **p** : La probabilité de succès d'une seule épreuve.
- **(1 - p)** : La probabilité d'échec.

La formule se lit comme une histoire qui décrit un chemin dans un arbre de probabilités :

- $\binom{n}{k}$ **:** il représente le nombre de chemins différents menant à exactement k succès. C'est ce qu'on appelle "le nombre de combinaisons de k parmi n".

- $\boldsymbol{p^k}$**:** C'est la probabilité d'obtenir les k succès (on multiplie la probabilité p par elle-même k fois).
- $\boldsymbol{(1-p)^{n-k}}$ **:** C'est la probabilité d'obtenir les échecs restants (si on a k succès, on a forcément n-k échecs).

3.1. Via la calculatrice (méthode recommandée à l'examen)

N'utilisant plus de calculatrice programmable depuis des années, l'IA à générer la partie suivante (à valider…)

- **Sur Casio (Graph 35+ / 90+E)**

1. Allez dans le menu **STAT**, puis **DIST** (F5).

2. Choisissez **BINM** (F5).
    - Pour P(X=k) : Choisissez **Bpd**.
    - Pour P(X≤k) : Choisissez **Bcd**.
3. Réglez sur **Var**.
4. Entrez les valeurs :
    - x : k (0,1,2 dans mon exemple)
    - numtrial (n) : 2 (dans mon exemple)
    - p : 0.12 (dans mon exemple)
5. Appuyez sur **EXE** pour obtenir le résultat.

- **Sur TI (TI-82 Advanced / TI-83 / TI-84)**

1. Appuyez sur **2nde** + **VAR** (menu DISTRIB).
2. Cherchez dans la liste :
    - binomFrép (ou binomPdf) pour P(X=k).
    - binomFcumul (ou binomCdf) pour P(X≤k).
3. Entrez les paramètres :
    - nbreEssais (n) : …
    - probSuccès (p) : …
    - valeur de x (k) : …
4. Appuyez sur **Coller** puis **Entrer**.

3.2. Via un tableur (Excel)

Pour calculer directement des probabilités et représenter graphiquement la loi binomiale :

- on utilise la formule = $LOI.BINOMIALE$.N(k ; n ; p ; $FAUX$) pour le calcul de $P(X = k)$
- on utilise la formule = $LOI.BINOMIALE$.N(k ; n ; p ; $VRAI$) pour le calcul de $P(X \leq k)$

Exemple :

=LOI.BINOMIALE.N(0;2;0,12;FAUX)

Dans cette situation, je recherche la probabilité P(X = 0), c'est-à-dire, la probabilité de ne pas tirer de pièces défectueuses sur 2 tirages (77%).

3.3. Via la formule mathématique

Bien que le référentiel privilégie l'usage de la calculatrice, il est utile de connaître la logique de la formule et de savoir l'utiliser.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$\binom{n}{k}$ **:** il représente le nombre de chemins différents menant à exactement k succès. C'est ce qu'on appelle "le nombre de combinaisons de k parmi n".

Le calcul du **coefficient binomial**, se fait par une formule mathématique : la logique des factorielles (!) :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Par exemple pour calculer 5! (factorielle 5), on multiplie tous les nombres entiers de 5 jusqu'à 1 :

5!=5×4×3×2×1 = 120

Exemple : $\binom{5}{3}$:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \times (5-3)!} = \frac{5!}{3! \times 2!}$$

Étape par étape :

- Décomposer le plus grand : 5!=5×4×3!
- Simplifier avec le 3! du dénominateur : $\frac{5\times4\times3!}{3!\times2!}$
- Calculer le reste : $\frac{5\times4}{2\text{x}1} = 10$

Il y a 10 façons différentes pour avoir 3 succès.

Pour information :

n	n! (Calcul)	Résultat
0	Convention	1
1	1	1
2	2 x1	2
3	3 x 2 x 1	6
4	4 x 3 x 2 x 1	24

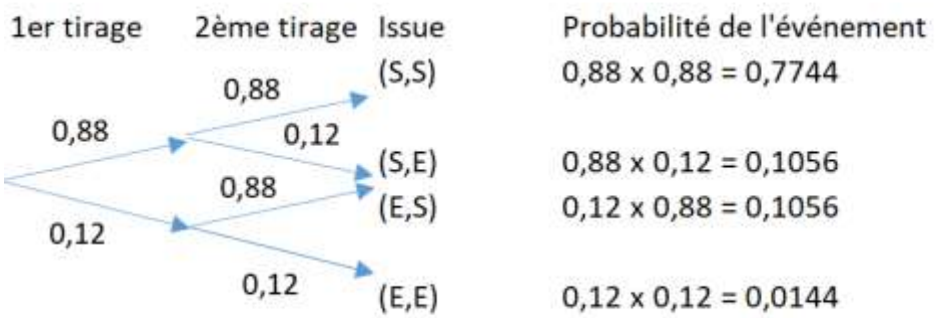
Reprenons l'ensemble de la formule :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Et renouons avec le 1er exemple du chapitre :

	Atelier	Probabilité
Pièce conforme	880	0,88
Pièce défectueuse	120	0,12
Total	1000	1

Succès (X=1) : La pièce est défectueuse.
Échec (X=0) : La pièce est conforme.



k	0	1	2
Probabilité d'obtenir k succès	0,0144	0,1056	0,7744

Combien il y a-t-il de chemins possible avec 2 tirages pour avoir 1 succès (pièce conforme) ?

$$\binom{2}{1} = \frac{2!}{1!\,\mathrm{x}\,(2-1)!} = \frac{2}{1} = 2$$

Quelle est la probabilité d'avoir un succès avec 2 tirages ?

$=\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$: 2 x 0,88 x 0,12 = 0,2112 = 21%

Combien il y a-t-il de chemins possible avec 2 tirages pour avoir 2 succès (pièce conforme)?

$$\binom{2}{2} = \frac{2!}{2!\,\mathrm{x}\,(2-2)!} = \frac{2!}{2!} = 1$$

Application de la factorielle de 0 : Par convention mathématique (fondamentale pour la loi binomiale), **0!=1**.

Quelle est la probabilité d'avoir 2 succès avec 2 tirages ?

$=\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$: 1 x 0,88² x 0,12^(2-2) = 77%

0,12^0=1 (tout nombre à la puissance 0 vaut 1).

Exemple concret de gestion :

Une banque sait que **2 %** des dossiers de crédit comportent une erreur. Elle contrôle un lot de **10 dossiers.** Quelle est la probabilité d'avoir **exactement 1 dossier avec une erreur** ?

Le calcul serait :

$=\binom{10}{1} 0{,}02^1 (1-0{,}02)^{(10-1)}$: 10 x 0,02 x 0,98^9 = 16,67%

Interprétation : Il y a environ **16,67 %** de chances de trouver exactement une erreur dans ce lot de 10 dossiers.

4. Indicateurs : espérance et écart-type

Ces indicateurs permettent d'interpréter les résultats sur un grand nombre de répétitions.

L'espérance d'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $B(n,p)$ est $E(X)$ = np

La **variance** d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale $B\ (n,p)$ est $V(X)$ = $np(1-p)$

L'écart-type est $\sigma(X)$ = √$V(X)$

Exemple :

Une machine produit des composants avec une probabilité de défaut de 0,05. On prélève un échantillon de 50 composants (tirage assimilé à un tirage avec remise). Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de composants défectueux.

1. **Identifier la loi** : X suit la loi binomiale $X \sim B(50{,}0{,}05)$car on répète 50 épreuves de Bernoulli indépendantes.
2. **Espérance** : E(X) = 50 x 0,05 = 2,5. En moyenne, il y a 2,5 composants défectueux par échantillon de 50.
3. **Écart type** :

   $V(X) = 50 \times 0{,}05 \times (1 - 0{,}05) = 2{,}375$
   $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 1{,}54$

Entraînez-vous avec notre mise en situation réelle type examen. Sujet inédit + corrigé méthodologique étape par étape (sur le site - shop BTS CG).