

Chapitre 1- Suites numériques

Table des matières

Chapitre 1 - Suites numériques.....	1
1. Qu'est-ce qu'une suite numérique ?	2
1.1. Deux façons de générer une suite	2
1.2. Sens de variation d'une suite	2
2. Les Suites arithmétiques : "l'addition constante"	3
3. Les Suites géométriques : "La multiplication constante"	4
4. Comparaison : arithmétique vs géométrique	6
5. Cas pratique de synthèse.....	6

1. Qu'est-ce qu'une suite numérique ?

Définition : Une suite numérique est une liste ordonnée de nombres, indexée par les entiers naturels (0, 1, 2, 3...). On note u_n le terme de rang n , et la suite elle-même est notée (u_n) .

- $u_0, u_1, u_2, \dots$ sont appelés les termes de la suite.
- n est appelé le rang.

1.1. Deux façons de générer une suite

Par une formule explicite : $u_n = f(n)$. Elle permet de calculer directement n'importe quel terme sans connaître les précédents.

Application pratique :

$$u_n = 3n + 2$$

$$u_0 = 3 \times 0 + 2 = 2$$

$$u_1 = 3 \times 1 + 2 = 5$$

$$u_2 = 3 \times 2 + 2 = 8$$

- **Par une relation de récurrence :** chaque terme est défini à partir du (ou des) terme(s) précédent(s), sous la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, avec u_0 donné.

Application pratique :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = 2 \times u_n + 1$$

$$u_1 = 2 \times 1 + 1 = 3$$

$$u_2 = 2 \times 3 + 1 = 7$$

$$u_3 = 2 \times 7 + 1 = 15$$

Contrairement à une suite définie en fonction de n , il n'est par exemple pas possible de calculer u_5 sans connaître u_2 pour une suite définie par récurrence.

1.2. Sens de variation d'une suite

On étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$:

- Si $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout n , alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout n , alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $u_{n+1} - u_n = 0$ pour tout n , alors la suite (u_n) est constante.

Application pratique :

Une entreprise compte 120 clients en année 0. Chaque année, elle gagne 15 nouveaux clients.

$$u_{n+1} = u_n + 15, \text{ avec } u_0 = 120.$$

$$u_{n+1} - u_n = 15 > 0 : \text{ la suite est strictement croissante.}$$

C'est une suite particulière, où l'on ajoute toujours le même nombre : une suite arithmétique (voir partie 2).

2. Les Suites arithmétiques : "l'addition constante"

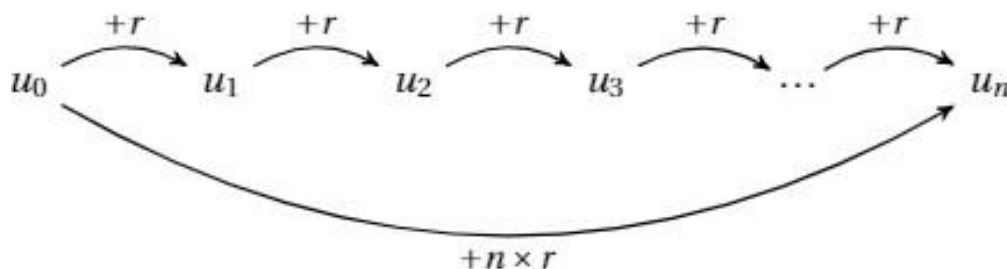
Une suite (U_n) est **une suite arithmétique** s'il existe un réel r tel que, pour tout entier naturel n ,

$$U_{n+1} = U_n + r.$$

Le réel r est appelé **raison** de la suite arithmétique.

C'est une suite où l'on passe d'un terme au suivant en **ajoutant** toujours le même nombre, appelé la **raison** (a).

Schématiquement,



Formules clés

- Relation de récurrence : $U_{n+1} = U_n + r$
- Formule explicite (pour trouver n'importe quel terme) : $U_n = U_0 + r \times n$
- Somme des termes : Nombre de termes $\times$ (1er terme + dernier terme) / 2

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r .

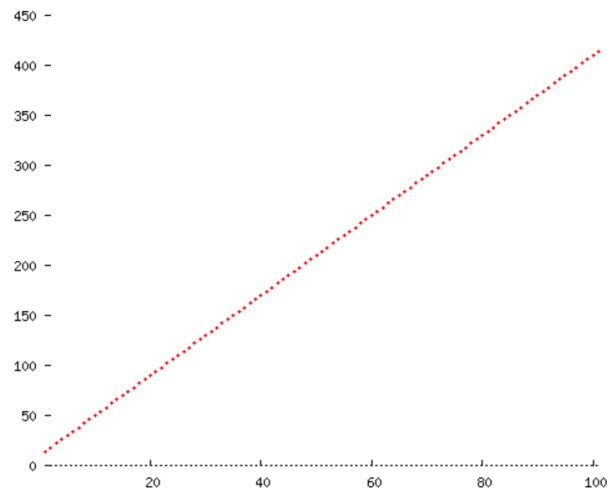
- Si $r > 0$, alors la suite (U_n) est strictement croissante.
- Si $r < 0$, alors la suite (U_n) est strictement décroissante.
- Si $r = 0$, alors la suite (U_n) est constante.

Exemple :

Une entreprise signe un bail. Le loyer initial est de **1 000 €**. Chaque année, le loyer augmente de **50 €**.

- Année 1 : $1000 + 50 = 1\,050$ €
- Année 2 : $1050 + 50 = 1\,100$ €
- Quel sera le loyer après 10 ans ? $= 1000 + 10 \times 50 = 1\,500$ €.
- Quel est le montant des loyers depuis 10 ans (depuis l'année 1 – 1 050 €) ? $= 10 \times ((1050 + 1500) / 2) = 12\,750$ €

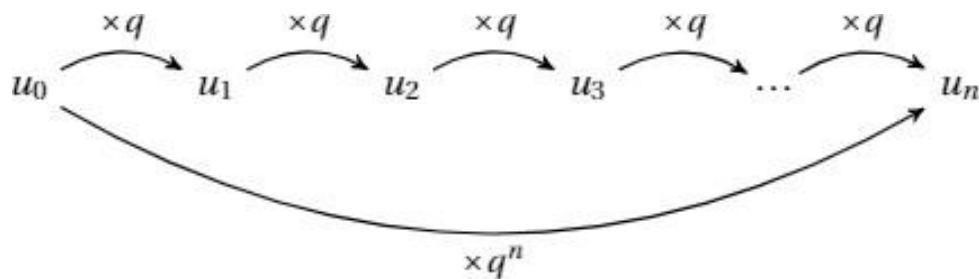
Représentation graphique en lien avec la suite arithmétique : $U_n = 4n + 10$



3. Les Suites géométriques : "La multiplication constante"

C'est une suite où l'on passe d'un terme au suivant en **multipliant** par un même nombre, appelé la **raison** q . C'est le modèle de la **croissance en pourcentage**.

Schématiquement,



Formules clés

- Relation de récurrence : $U_{n+1} = U_n \times q$
- Formule explicite : $U_n = U_0 \times q^n$
- Somme des termes :

$$S = u_0 \times \frac{1-q^{\text{nb de termes}}}{1-q}$$

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q .

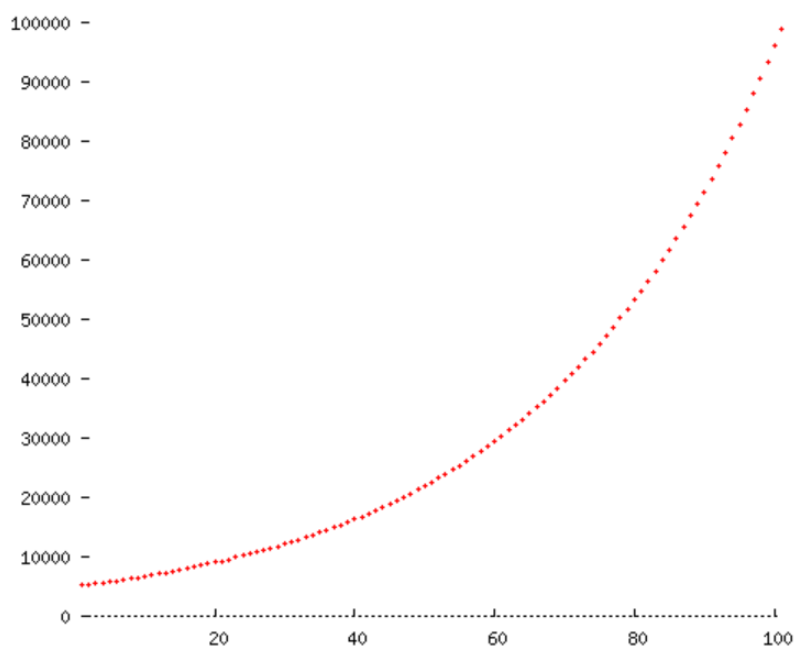
- Si $q > 1$, alors la suite (U_n) est strictement croissante.
- Si $0 < q < 1$, alors la suite (U_n) est strictement décroissante.
- Si $q = 1$, alors la suite (U_n) est constante.

Exemple :

Vous placez **5 000 €** sur un compte à **3 %** par an.

- Année 1 : $5000 \times 1,03 = 5\,150 \text{ €}$
- Année 2 : $5150 \times 1,03 = 5\,304,50 \text{ €}$
- Quel est le capital au bout de 5 ans ? $5000 \times (1,03)^5 = 5796,37 \text{ €}$.

Représentation graphique en lien avec la suite géométrique : $U_n = 5\,000 \times (1+3\%)^n$



4. Comparaison : arithmétique vs géométrique

Caractéristique	Suite arithmétique	Suite géométrique
Évolution	Constante (linéaire)	Proportionnelle (exponentielle)
Graphique	Points alignés sur une droite	Points sur une courbe qui monte de + en + vite
Mots-clés Gestion	"Augmente de X euros"	"Augmente de X %"
Application STMG	Salaire fixe + prime annuelle identique, loyer indexé sur un montant fixe	Chiffre d'affaires en croissance de X % par an, intérêts composés, évolution démographique

5. Cas pratique de synthèse

Énoncé : Une entreprise réalise un chiffre d'affaires (CA) de **200 000 €** en N. Elle prévoit une croissance de **4 %** par an.

1. **Identifier la suite :** C'est une hausse en pourcentage, donc une suite **géométrique** de raison $q = 1,04$.
2. **Calculer le CA en 2030 (soit 6 ans plus tard) :** $200\,000 \times 1,04^6 = 253\,063,80 \text{ €}$.
3. **Calculer le CA total cumulé entre N et N+6 (7 années au total) :**

N	N+1	N+2	N+3	N+4	N+5	N+6
200 000,00 €	208 000,00 €	216 320,00 €	224 972,80 €	233 971,71 €	243 330,58 €	253 063,80 €

$$200\,000 \times (1 - 1,04^7) / (1 - 1,04) = 1\,579\,659 \text{ €}$$