Chapitre 5 - Mathématiques financières

Table des matières

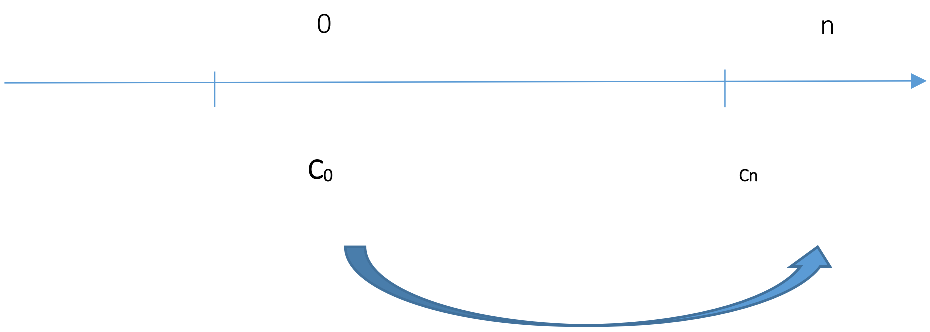
1. Actualisation et capitalisation de flux

1.1. Principes généraux

- Capitalisation

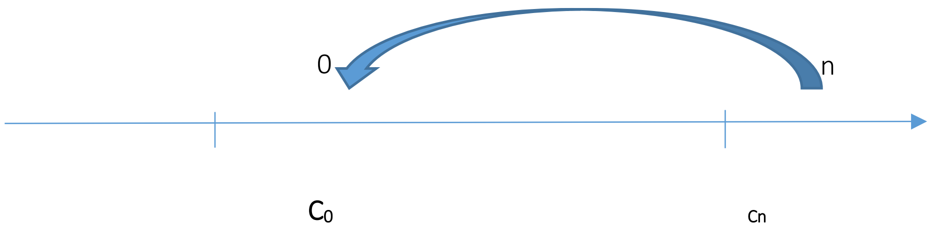
La capitalisation est le calcul de la valeur acquise (total du capital et des intérêts) par un placement au bout de n périodes.

Le capital génère des intérêts dont ces intérêts gêneront aussi d'autres intérêts.



La capitalisation correspond à connaître un montant futur par rapport à un montant présent. Ainsi, combien vais-je recevoir si je place 1 000 € pendant 2 ans à un taux de 2 % ?
La période retenue pour les calculs de capitalisation est le plus souvent l'année, mais elle peut être aussi le trimestre voire le mois.

- Actualisation



L'actualisation consiste **à déterminer la valeur aujourd'hui** (la valeur actuelle) **d'une somme** (ou d'une suite de sommes) dont la **valeur future est connue**. L'actualisation nécessite le choix d'un taux, le taux d'actualisation.
Ainsi, une personne va hériter de 30 000 € dans 5 ans, à quelle valeur correspondent ces 30 000 € aujourd'hui ?

Règles à appliquer pour l'actualisation et la capitalisation :
- seuls des flux exprimés à une même date peuvent être comparés ou combinés,
- pour transporter des flux vers le futur, il faut capitaliser,
- pour transporter des flux vers le passé, il faut actualiser.

1.2. Les intérêts composés

Les intérêts composés sont des intérêts qui rapportent eux-mêmes des intérêts. Ils sont généralement utilisés pour les placements d'une **durée supérieure à une année**. Pour les opérations à intérêts composés, les intérêts sont capitalisés, c'est-à-dire qu'à chaque fin de périodes ils rapportent eux-mêmes des intérêts.

Période	Capital début de période	Intérêt	Valeur acquise en fin de période
1	C	Ci	C+Ci = C(1+i)
2	$C(1+i)$		$C(1+i)+ C(1+i)i= C (1+i) (1+i) = C(1+i)^2$
3	$C(1+i)^2$		$C(1+i)^2+ C(1+i)^2i= C (1+i)^2 (1+i) = C(1+i)^3$
…			
n	$C(1+i)^{n-1}$		$C(1+i)^n$

<u>Exemple :</u> soit une somme de 10 000 € placée à intérêts composés pendant 2 ans au taux de 2 %.

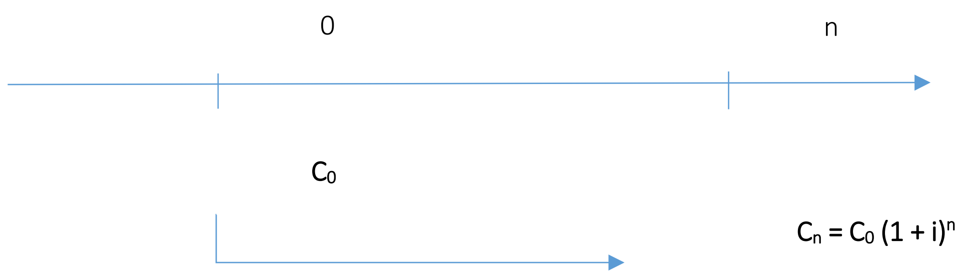
- Année 1 : Intérêts = 10 000 × 0,02 = 200 € Valeur acquise = 10 000 + 200 = 10 200 €.
- Année 2 : Intérêts = 10 200 × 0,02 = 204 € Valeur acquise = 10 200 + 204 = 10 404 €.
- Année 1 : 10 000 x (1 + 0,02) ^1 = 10 200 €.
- Année 2 : 10 000 x (1 + 0,02) ^2 = 10 404 €.

1.3. Valeur acquise avec intérêts composés

Elle correspond à la valeur acquise (C_n) par un capital placé aujourd'hui (C_o) après n période de placement.

Formule valeur acquise :

$$\boxed{\mathbf{Cn = Co\ x\ (1 + i)^n}}$$



<u>Exemple :</u> vous placez une somme de 5 000 € au taux de 5 % pendant 4 ans. Quel sera le capital acquis ?
Cn = 5000 * (1 + 0,05)^4 = 6 077,53 €

<u>Exemple :</u> le trésorier de l'entreprise prévoit de placer un capital de 25 000 € à un taux d'intérêt de 3% pendant 2 ans et 5 mois. Quelle est la valeur acquise ?

Par interpolation :
C_2 : C_n au bout de 2 ans : $C_2 = 25\,000 * (1{,}03)^2 = 26\,522{,}50$ €.
C_3 : C_n au bout de 3 ans : $C_3 = 25\,000 * (1{,}03)^3 = 27\,318{,}17$ €.
$C_3 - C_2$ = 27 318,17 € – 26 522,50 € = 795 ,68 € correspond à l'année 3 pour 12 mois.
Soit pour 5 mois : 795,68 € x 5/12 = 331,53 €.
D'où la valeur acquise au bout de 2 ans et 5 mois est de 26 522,50 € + 331,53 € = 26 854,02 €.

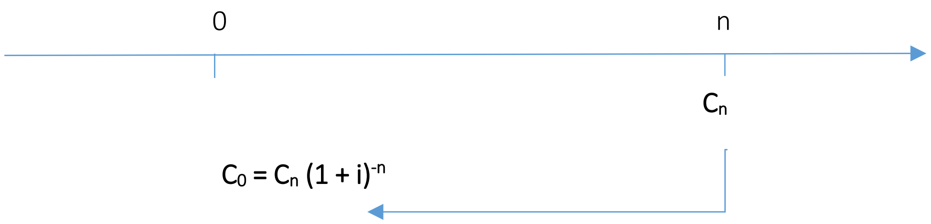
Par la formule : 25 000 * (1,03)^(2 + 5/12) = 26 851,18 €

1.4. Valeur actuelle avec l'intérêt composé

L'actualisation nous permet de savoir, dans des conditions fixées, quelle est la valeur actuelle (période 0) d'une somme qui sera perçue à la fin d'une certaine période. Cette approche n'est utile que pour les intérêts composés puisqu'elle concerne en général le moyen long terme.

Elle consiste à calculer la valeur aujourd'hui (Co) d'un capital dont on connaît le montant à une échéance (Cn).

$$\boxed{C_0 = C_n \times (1 + i)^{-n}}$$



Exemple : vous avez 22 ans et vous recevrez dans 10 ans 200 000 € le jour de vos 32 ans. À quel montant cette somme correspond-elle aujourd'hui avec un taux de 1 % ?

Co = 200 000 (1,01)^-10 = 181 057,40 €

2. Annuités et rentes

Un particulier peut verser à la fin de chaque période (mensuelle ou trimestrielle, annuelle) un montant fixe pour se constituer un patrimoine (placement par capitalisation). Cette suite de règlements effectués à intervalles de temps égaux est appelée une suite d'annuités.

2.1. Valeur acquise par des versements successifs en fin de période

Lorsque le versement est effectué en fin de période on parle de terme échu. Début n il y aura eu n versement.

Périodes	Valeur placée	Valeur acquise en fin de période = début n
Fin t=0 ou début t=1	a	$a(1+i)^{n-1}$
Début 2	a	$a(1+i)^{n-2}$
Début 3	a	$a(1+i)^{n-3}$
…	a	….
Début n	a	a

Si nous faisons la somme de ces valeurs acquises à la fin de période (début n) on obtient : Cn = a + $a(1+i)^{n-3}$ + $a(1+i)^{n-2}$ + $a(1+i)^{n-1}$.

Il s'agit d'une suite de n termes en progression géométrique de terme a et de raison (1+i). Cela correspond à la somme de n termes en progression géométrique = 1 er terme (a) × (raison) n – 1 / raison – 1.

Nous pouvons donc écrire :

$$\mathbf{Cn = a * \frac{(1+\mathit{i})^{\wedge}n \ - 1}{i}}$$

<u>Exemple</u> : un particulier verse 500 € à la fin de chaque année comme épargne pendant 3 ans. Quelle est la valeur acquise par ces versements au taux de 3%.

$\text{Cn} = 500\ € * \frac{(1+3\%)^{\wedge}3 - 1}{0{,}03}$ = 1 545,45 €

Ou

Cn = 500 € * (1 + 3 %)^2 + 500 € * (1 + 3 %)^1 + 500 € = 1 545,45 €.

Vérification :

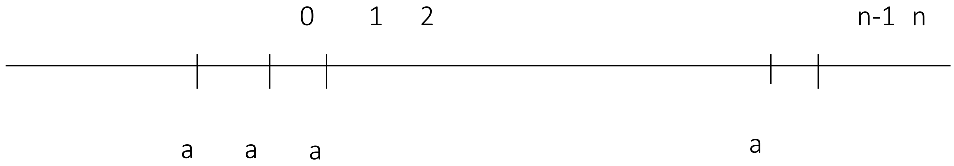
	Versement	Année 1	Année 2	Année 3	Total
Année 1	500,00 €		15,00 €	15,45 €	530,45 €
Année 2	500,00 €			15,00 €	515,00 €
Année 3	500,00 €				500,00 €
				Total	1 545,45 €

<u>**Exemple :**</u> le particulier verse 100 € à la fin de chaque mois comme épargne pendant 5 ans. Quelle est la valeur acquise par ces versements au taux de 3% annuel.
Taux équivalent mensuel pour un taux annuel de 3% : $1{,}03^{1/12}-1 = 0{,}246\%$. Et le nombre de périodes est de 12 * 5 = 60 mois.

$$Cn = 100€ * \frac{(1+0{,}00246)\hat{}^{60}-1}{0{,}00246} = 6\,456{,}87\ €$$

Valeur acquise par des versements successifs en début de période

Lorsque le versement est effectué **en début de période** on parle de terme à échoir.



Périodes	Valeur placée	Valeur acquise en fin de période = début n
Fin t=0 ou début t=1	a	$a(1+i)^{n}$
Début 2	a	$a(1+i)^{n-2}$
Début 3	a	$a(1+i)^{n-3}$
…	a	….
Début n-1	a	$a(1+i)$

Si nous faisons la somme de ces valeurs acquises à la fin de période (début n) on obtient : $C = a(1+i) +….+ a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^{n}$
Il s'agit d'une suite de n termes en progression géométrique de terme a (1+i) et de raison (1+i).

Nous pouvons donc écrire que :

$$\mathbf{Cn = a(1+i) * \frac{(1+\boldsymbol{i})\hat{}n\ -1}{i}}$$

<u>Exemple</u> : une entreprise verse 1 000 € au début de chaque année comme loyer pendant 3 ans. Quelle est la valeur acquise par ces versements au taux de 3%.

$$\mathbf{Cn = 1\,000\ €\ (1+0{,}03) * \frac{(1+0{,}03)^{3}-1}{0{,}03} = 3\,183{,}63\ €}$$

Ou

Cn = 1 000 € * (1 + 3 %)^3 + 1 000 € * (1 + 3 %)^2 + 1 000 € * (1 + 3 %)^1 = 3 183,63 €.
Vérification :

	Versement	Année 1	Année 2	Année 3	Total
Année 1	1 000,00 €	30,00 €	30,90 €	31,83 €	1 092,73 €

Année 2	1 000,00 €		30,00 €	30,90 €	1 060,90 €
Année 3	1 000,00 €			30,00 €	1 030,00 €
				Total	3 183,63 €

<u>Exemple</u> : une entreprise verse 100 € au début de chaque mois comme sur un compte à terme pendant 5 ans. Quelle est la valeur acquise au bout des 5 ans, au taux de 3% annuel.
Taux équivalent mensuel pour un taux annuel de 3% : $1{,}03^{1/12}-1 = 0{,}246\%$. Et le nombre de périodes est de 12 * 5 = 60 mois.

$$\mathbf{Cn = 100\text{ €}\,(1+0{,}00246) * \frac{(1+0{,}00246)^{60}-1}{0{,}00246} = 6\,472{,}75\text{ €}}$$

Entraînez-vous avec notre mise en situation réelle type examen. Sujet inédit + corrigé méthodologique étape par étape (sur le site - shop BTS CG).

2.2. Valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes versées en fin de période

L'actualisation consiste à déterminer la valeur aujourd'hui (la valeur actuelle) d'une somme (ou d'une suite de sommes) dont la valeur future est connue.
Dans le cas de n versements (a) réalisés à terme **échu doivent être valorisés à la date actuelle** (t=0) au taux i :

Périodes	Valeur placée	Valeur acquise en fin de période = début n
Fin t=0 ou début t=1	a	$a(1+i)^{-1}$
Début 2	a	$a(1+i)^{-2}$
Début 3	a	$a(1+i)^{-3}$
…	a	….
Début n	a	$a(1+i)^{-n}$

Si nous faisons la somme de ces valeurs acquises à la fin de période (début n) on obtient : $C_0 = a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} \ldots + a(1+i)^{-(n-2)} + a(1+i)^{-(n-1)} + a(1+i)^{-n}$
Il s'agit d'une suite de n termes en progression géométrique de terme $a(1+i)^{-1}$ et de raison $(1+i)^{-1}$ Nous pouvons donc écrire que :

$$\boxed{\mathbf{Co = a * \frac{1-(1+\mathit{i})^\wedge-n}{i}}}$$

<u>Exemple</u> : une entreprise envisage un investissement qui lui apporterait 10 000 € par an pendant trois ans. Quelle en est la valeur actuelle au taux de 2 %.

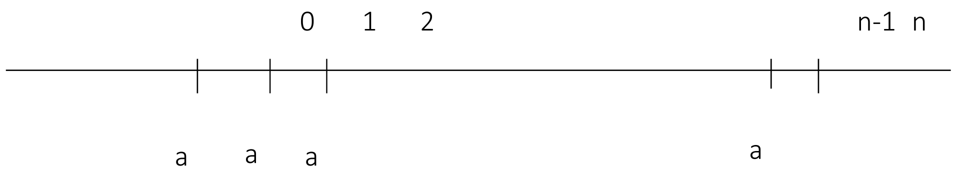
$$\boxed{\mathbf{Co = 10\,000\,€ * \frac{1-(1+0,02)^{-3}}{0,02} = 28\,839\,€}}$$

<u>Exemple</u> : une entreprise envisage un investissement qui lui apporterait 1 000 € par mois pendant trois ans. Quelle en est la valeur actuelle au taux de 2 %.
Taux équivalent mensuel pour un taux annuel de 2 % : $1{,}02^{1/12}-1 = 0{,}1652\%$.
Et le nombre de périodes est de 12 * 3 = 36 mois.

$$\mathbf{Co = 1\,000\,€ * \frac{1-(1+0,001652)^{-3}}{0,001652} = 34\,922\,€}$$

2.3. Valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes versées en début de période

Dans le cas de n versements (a) réalisés à terme à échoir doivent être valorisés à la date actuelle (t=0) au taux i :



Périodes	Valeur placée	Valeur acquise en fin de période = début n
Fin t=0 ou début t=1	a	a
Début 2	a	$a(1+i)^{-1}$
Début 3	a	$a(1+i)^{-2}$
…	a	….
Début n-1	a	$a(1+i)^{-(n-1)}$

Si nous faisons la somme de ces valeurs acquises à la fin de période (début n) on obtient : $C_0 = a + a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} .... + a(1+i)^{-(n-2)} + a(1+i)^{-(n-1)}$
Il s'agit d'une suite de n termes en progression géométrique de terme a et de raison $(1+i)^{-1}$. Nous pouvons donc écrire que :

$$\boxed{\mathbf{Co = a\,(1+i) * \frac{1-(1+\mathit{i})\hat{}-n}{i}}}$$

<u>Exemple</u> : un loyer payé à échoir d'une flotte de camion coûte 15 000 € par an pendant trois ans. Quelle en est la valeur actuelle au taux de 5%.

$$\mathbf{Co = 15\,000\,€\,(1,05) * \frac{1-(1+0,05)^{-3}}{0,05} = 42\,891\,€}$$

3. Le financement par dettes par les emprunts indivis

<u>Définition</u> : les emprunts indivis sont les emprunts faits auprès d'un seul prêteur.

Il n'y a qu'un seul prêteur, il est donc indivisible, d'où le qualificatif indivis (le nominal de la dette n'est pas divisé). L'emprunt indivis s'oppose donc à l'emprunt obligataire pour lequel l'emprunteur (une grande entreprise ou l'État) recourt à une multitude de créanciers (le nominal de la dette est divisé en titres).

Règles de bases :

- les intérêts sont calculés en appliquant le taux d'intérêt au montant restant à rembourser,
- le remboursement du crédit, total ou partiel, porte également le nom d'amortissement,
- le montant restant à rembourser à la fin d'une période est égal à la différence entre d'une part le montant restant à rembourser à l'issue de la période précédente, d'autre part l'amortissement qui vient d'être réalisé,
- le montant égal à la somme des intérêts et de l'amortissement du principal s'appelle l'annuité.

Les tableaux d'amortissement des emprunts

Le remboursement d'un emprunt indivis peut se réaliser selon trois méthodes différentes :

- remboursement par annuité constante,
- remboursement par amortissement constant,
- remboursement in fine (remboursement de la totalité de l'emprunt à la fin du contrat).

3.1. Remboursement in fine

On dit qu'un crédit est remboursé in fine lorsque la totalité de son montant est amorti à la date d'échéance. Par conséquent, le montant restant à rembourser, chaque année, est le même. Ainsi, les intérêts sont identiques chaque année.

Informations	Calculs
Annuité	Intérêt + Amortissement (pour le dernier versement), sinon l'annuité = intérêt

Intérêts	Emprunt restant début de période × taux d'intérêt
Emprunt restant fin de période	Emprunt restant début de période – amortissement
Amortissement	**Remboursement en dernière année**

Exemple : le 1er janvier un emprunt de 15 000 € est contracté auprès de la banque. Durée 5 ans, taux 5,9%. Taux IS 25%.

Années	Emprunt début de période	Intérêt	Amortissement	Annuité
1	15000	885	0	885
2	15000	885	0	885
3	15000	885	0	885
4	15000	885	0	885
5	15000	885	15000	15885

Année 1 : intérêt : 15 000 € x 5,9 % = 885 €.

Année 5 : intérêt : 15 000 € x 5,9 % = 885 € ; annuité : 15 000 € + 885 € = 15 885 €.

3.2. Remboursement par amortissement constant

On parle de crédit à amortissements constants lorsque le montant de chaque remboursement est égal au montant de l'emprunt rapporté à sa maturité. La diminution du montant restant à rembourser, à l'issue de chaque amortissement, conduit à une décroissance des intérêts.

Informations	Calculs
Annuité	Intérêt + Amortissement
Intérêts	Emprunt restant début de période × taux d'intérêt
Emprunt restant fin de période	Emprunt restant début de période – amortissement
Amortissement	**Emprunt initial / durée emprunt**

Exemple : le 1er janvier un emprunt de 15 000 € est contracté auprès de la banque. Durée 5 ans, taux 5,9 %.

Années	Emprunt début de période	intérêt	Amortissement	Annuité
1	15000	885	3000	3885
2	12000	708	3000	3708
3	9000	531	3000	3531
4	6000	354	3000	3354
5	3000	177	3000	3177

Le montant de l'emprunt à rembourser chaque année est de 15 000 € / 5 = 3 000 €.

Le montant restant à rembourser est donc :

- à la fin de la première année de 15 000 €,
- à la fin de la deuxième année de 15 000€ – 3 000 € = 12 000 €.

Les intérêts dus sont donc :

- à la fin de la première année de 15 000 € x 5,9 % = 885 €,
- à la fin de la deuxième année de 12 000 € x 5,9 % = 708 €.

Le versement à réaliser auprès de l'établissement financier :

- à la fin de la première année 885 € + 3 000 € = 3 885 €,
- à la fin de la deuxième année 708 € + 3 000 € = 3 708 €.

3.3. Remboursement par annuité constante

Un crédit est remboursé par annuités constantes lorsque les montants des paiements annuels, l'annuité (qui regroupent les intérêts et les amortissements) sont constants. Dans la mesure où le montant restant à rembourser diminue sous l'effet des amortissements, les intérêts diminuent chaque année. Aussi, dans la mesure où les annuités sont constantes, les amortissements sont progressifs.

Formule à utiliser pour calculer l'annuité constante :

$$a = \text{ } montant\ de\ l'emprunt * \frac{Taux}{1-(1+taux)\hat{}-durée} *$$

Informations	Calculs
Annuité	Cf. formule
Intérêts	Emprunt restant début de période × taux d'intérêt
Emprunt restant fin de période	Emprunt restant début de période – amortissement
Amortissement annuel	**Annuité constante - intérêts**

Exemple : le 1er janvier un emprunt de 15 000 € est contracté auprès de la banque. Durée 5 ans, taux 5,9 %.

Années	Emprunt début de période	Intérêt	Amortissement	Annuité
1	15000	885	2666	3551
2	12334	727,69	2824	3551
3	9510	561,09	2990	3551
4	6520	384,67	3167	3551
5	3353	197,85	3353	3551

Annuité : 15 000 x 0,0590 / (1 – (1,0590) ^-5) = 3 551,26 €. **Attention aux parenthèses !!!**

Une mise en situation concrète pour valider vos acquis + la correction pas à pas pour ne plus faire d'erreurs (sur le site - shop BTS CG).