Chapitre 10 - Loi uniforme et loi normale

Table des matières

1. Les variables aléatoires 2
  - 1.1. Variable aléatoire discrète X ou discontinue 2
  - 1.2. Variable aléatoire continue (hors programme) 4
  - 1.3. Propriétés sur les variables aléatoires 5
2. La loi normale 6
  - 2.1. Le calcul d'une probabilité via la formule mathématique (Densité de probabilité) 6
  - 2.2. Le calcul d'une probabilité via la calculatrice ou le tableur 7
  - 2.3. Les "valeurs remarquables" (règle empirique) 7

Dans le domaine de la gestion, de nombreux phénomènes sont soumis à des aléas : qualité des produits, comportement des consommateurs, concurrence, environnement, etc. Bien souvent, certains **sont soumis à des lois statistiques**, et à ce titre, nécessitent la mise en œuvre d'un certain nombre d'outils.

1. Les variables aléatoires

Une variable aléatoire est une application qui permet d'associer **à chaque résultat d'une épreuve (éventualité) une probabilité.**

Exemple : on prélève au hasard une marchandise dans un lot et on relève son poids. Le poids relevé est aléatoire et s'exprime par un nombre : c'est donc une variable aléatoire.

1.1. Variable aléatoire discrète X ou discontinue

Il s'agit d'une variable dont l'ensemble des **valeurs possibles est dénombrable ou fini** (ex. nombre d'incidents d'impressions, nombre de gagnants à un jeu, nombre quotidien de commandes).

- Fonction de distribution ou loi de probabilité

La fonction de distribution (ou Loi de probabilité) d'une variable aléatoire X est l'application, qui **à chaque valeur possible de xi**, associe une probabilité **« pi [P (xi) ou P(X) xi)] ».**

La somme des probabilités associées à une **variable aléatoire X est égale à 1** (probabilité d'un événement certain).

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1}$$

Exemple : un attaché commercial a relevé le nombre de commandes obtenues sur 300 clients.

Nombre quotidien de commandes	0	1	2	3	4	Total
Nombre de clients	30	60	120	75	15	300

Détermination de la loi de probabilité du nombre quotidien de commandes

Soit la variable aléatoire étudiée X : « nombre quotidien de commandes ». Il s'agit bien d'un ensemble fini de valeurs.

Les probabilités associées à chaque valeur de x_i sont assimilables aux fréquences de la série statistique.

Ainsi, nous obtenons respectivement : (0,10 = 30/300)

x_i	0	1	2	3	4	
$P(X = x_i)$ ou (Px_i)	0,10	0,20	0,40	0,25	0,05	$\sum P(X) = 1$

- Espérance mathématique, notée E(X)

Exprime la tendance centrale de la variable aléatoire X. Elle est la **moyenne arithmétique** des valeurs

$$E(X) = \sum_{1}^{n} P(x_i) * x_i$$

prises par X pondérées par les probabilités associées à chacune de ces valeurs.

<u>**Exemple**</u> (suite) *:*

Nbre de commande (X)	0	1	2	3	4	Total
Nombre de clients	30	60	120	75	15	300
$P(X = x_i)$ ou (Px_i)	10%	20%	40%	25%	5%	100%
Moyenne du nbre de commande	0	0,2	0,8	0,75	0,2	1,95

Moyenne = 0*10% + 1*20 % + … + 4*5% = 1.95 commande en moyenne.

- Variance, notée V(X) et écart-type, noté α (X)

La **varianc**e exprime la **dispersion** de la variable aléatoire X par rapport à la tendance centrale (moyenne). La variance de X est la somme des écarts au carré entre les valeurs prises par X et son espérance mathématique, pondérés par des probabilités associées à chacune de ces valeurs.

$$V(X) = \Sigma[x_i - E(X)]^2 * P(x_i)$$

<u>Exemple</u> (suite) :

Nbre de commande (X)	P(X = xi)	(Xi - E(x))²	(Xi - E(x))² * P(X)
0	10%	3,80	0,380
1	20%	0,90	0,181
2	40%	0,00	0,001
3	25%	1,10	0,276
4	5%	4,20	0,210

Moyenne du nbre de commande	1,95
Variance	1,05

L'écart-type est la racine carrée de la variance. Il utilisé en gestion pour apprécier le risque. De façon plus générale, plus il est élevé, plus le risque est grand.

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

<u>Exemple</u> (suite) :

Variance	1,05
Écart type	1,02

1.2. Variable aléatoire continue (hors programme)

Les valeurs réelles sont comprises dans un intervalle (fini ou non).

$$\boxed{\mathbf{P\ (X = x) = 0}}$$

La connaissance de la fonction de répartition F d'une variable continue détermine sa **loi de probabilité** et la **dérivée de la fonction de répartition (**f s'appelle la **« densité de probabilité »)**

Pour tous réels a et b, on a :

P (a < X < b) = P (a ≤ X ≤ b) = F (b) – F (a)

Comment déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire continue ?

On suppose connue f la densité de probabilité de X. Pour tout x ∈R, on a :

$$F(x) = \mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

Comment calculer **l'espérance, l'écart-type d'une variable aléatoire continue** ?

On suppose connue f la densité de probabilité de X.

Pour l'espérance mathématique :

1. Utiliser la formule :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x.$$

Pour l'écart-type :

2. Calculer

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x$$

3. Calculer la variance par la formule V (X) = E(X²) −E(X)².

4. Calculer enfin σ(X) = √V (X).

1.3. Propriétés sur les variables aléatoires

Les propriétés de l'espérance mathématique E et de la variance V sont les mêmes que la variable aléatoire soit discrète ou continue. Soit a et b deux constantes, et X une variable aléatoire.

Propriétés de l'espérance et la variance mathématique dans le cas de combinaison linéaire de variables aléatoires :

E (a) =a

E(aX +/- b) = a. E(X) +/- b

E(X + Y) = E(X) + E(Y)

E(X – Y) = E(X) - E(Y)

$$E(X.Y) = E(X).E(Y)$$
$$V(aX) = a^2*V(X)$$
$$V(aX +/- b) = a^2.V(X)$$
$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$
$$V(X - Y) = V(X) - V(Y) \text{ (attention au signe)}$$

<u>**Exemple (suite)**</u> : calculer l'espérance mathématique et l'écart-type du résultat quotidien R du commercial sachant que chaque contrat conclu génère un produit de 1 000 €, des charges variables de 200 € et que les charges fixes quotidiennes sont de 500 €. La variable aléatoire sera la quantité.

Le résultat R en fonction des quantités est : R = (1 000 – 200)* X – 500 = 800 X – 500
Espérance mathématique du résultat quotidien est : E(R) = E(800X – 500) = 800 E(X) – 500, avec E(X) = 1,95 E(R) = 800*1,95 – 500 = 1 060 €

Variance du résultat quotidien
V(R) = V(800X – 500) = 8002 V(X), avec V(X) = 1,05
V(R) = 800^2*1,05 = 672 000€

L'écart-type du résultat quotidien
α (R) = √672 000= 819 € Représente le risque que le résultat s'éloigne de la moyenne.

2. La loi normale

Une variable aléatoire continue dont les valeurs dépendent de multiples facteurs indépendants dont les effets se cumulent suit une **loi normale** de paramètres, ou **loi de Laplace Gauss.** Elle peut servir d'approximation à d'autres lois comme la loi binomiale et la loi de Poisson.

Une variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance μ est d'écart-type σ notée $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma)$, lorsque la densité de probabilité est définie par :

Cette loi est la plus répandue, car elle traduit la complexité des phénomènes physiques, socio-économiques souvent distribués normalement.

Pour calculer une probabilité avec une loi normale, vous avez deux options : soit vous utilisez la formule mathématique "brute", soit vous utilisez les outils modernes (calculatrice, Excel) qui font le travail pour vous.

2.1. Le calcul d'une probabilité via la formule mathématique (Densité de probabilité)

Pour une valeur x, la formule est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- $\boldsymbol{\mu}$: la moyenne (le sommet de la courbe).
- σ : l'écart-type (la largeur de la courbe).
- **e** : la fonction exponentielle.

En BTS CG, on n'intègre jamais cette fonction à la main. On utilise directement les fonctions via les calculatrices ou excel.

2.2. Le calcul d’une probabilité via la calculatrice ou le tableur

- Sur Excel / Google Sheets

La fonction LOI.NORMALE.N permet de calculer directement la probabilité cumulative $P(X \le x)$:

=LOI.NORMALE.N(x ; moyenne ; ecart_type ; VRAI)

Exemple pour P(X< 15) avec $\boldsymbol{\mu}$ *=10 et* $\boldsymbol{\sigma}$ *=4 :* =LOI.NORMALE.N(15 ; 10 ; 4 ; VRAI) = **0,894**

=LOI.NORMALE.N(15;10;4;VRAI)

- Sur Calculatrice (TI ou Casio)

Les menus de distribution gèrent n'importe quelle moyenne ou écart-type :

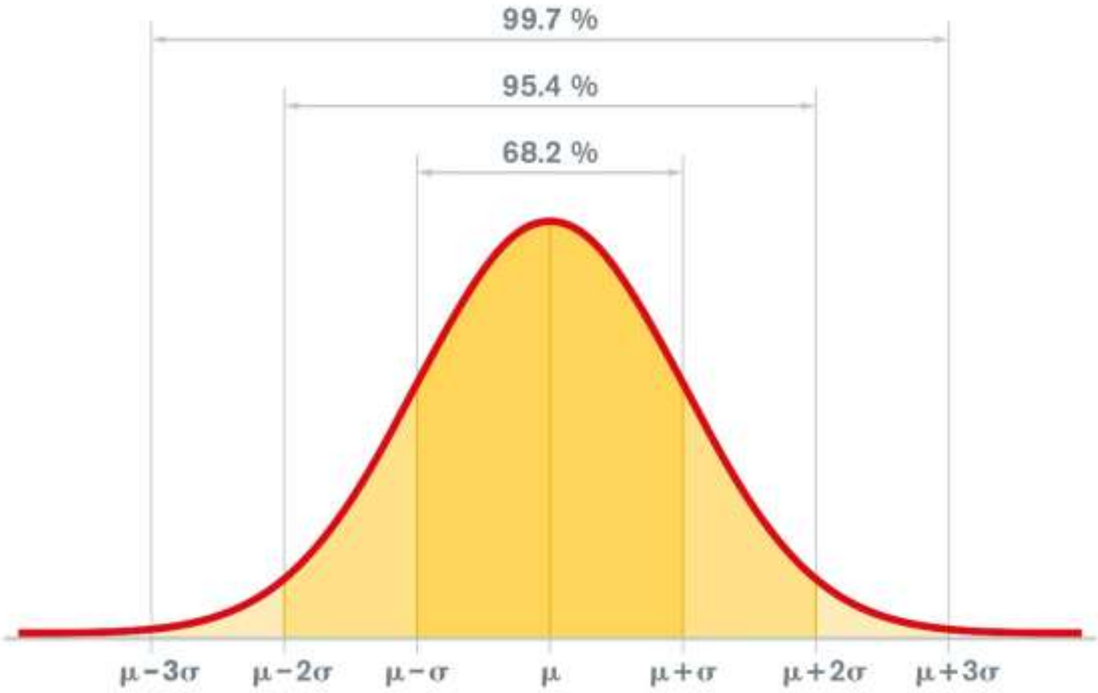
- **TI-83/84 :** 2nde + VAR -> 2:normalFRép(borne_inf, borne_sup, \mu, \sigma)
- **Casio Graph :** Menu Stat -> DIST -> NORM -> Ncd (saisir les bornes, puis σ, puis $\boldsymbol{\mu}$).

2.3. Les "valeurs remarquables" (règle empirique)

Si vous n'avez pas d'outil sous la main, vous pouvez estimer les probabilités d'une loi normale quelconque grâce à ces trois repères fixes :

Intervalle autour de la moyenne	**Probabilité approximative**
Entre $\mu-\sigma$ et $\mu+\sigma$	**~68%** des données
Entre $\mu-2\sigma$ et $\mu+2\sigma$	**~95%** des données

Entre μ−3σ et μ+3σ	**~99,7%** des données



Exemple : Si les notes d'un concours suivent une loi normale $\mathcal{N}(10\ ;\ 2)$,, vous savez instantanément que 95% des élèves ont :

Intervalle autour de la moyenne	**Probabilité approximative**
Entre 8 et 12	**~68%** des données
Entre 6 et 14	**~95%** des données
Entre 4 et 16	**~99,7%** des données

Une mise en situation concrète pour valider vos acquis + la correction pas à pas pour ne plus faire d'erreurs (sur le site - shop BTS CG).