

Chapitre 2- Fonctions de la variable réelle

Table des matières

Chapitre 2 - Fonctions de la variable réelle.....	1
1. Une fonction, c'est quoi ?	2
1.1. Deux notations, deux points de vue : image et antécédent.....	2
1.2. Deux façons de représenter une fonction	2
2. Le taux de variation : mesurer une évolution	5
3. Fonctions monotones	6
4. Les fonctions polynômes du second degré : la parabole	7
4.1. Trois écritures pour une même parabole	7
4.2. Détermination de l'axe de symétrie.....	7
5. Tableau de variation, factorisation et signe	9
5.1. Tableau de variation	9
5.2. Factoriser de l'équation du second degré	10
5.3. Étudier le signe grâce à la forme factorisée.....	11
6. Cas pratique de synthèse.....	13

1. Une fonction, c'est quoi ?

Une fonction, c'est un outil mathématique qui permet de **modéliser la dépendance entre deux grandeurs** : à chaque valeur d'une variable x , on associe une seule valeur y . Autrement dit, y dépend de x , et cette dépendance obéit à une règle précise.

On rencontre les fonctions partout en gestion : le prix d'un envoi postal en fonction du poids, l'impôt à payer en fonction du revenu, le coût de production en fonction de la quantité fabriquée...

1.1. Deux notations, deux points de vue : image et antécédent

$y = f(x)$: on s'intéresse au résultat. On dit "y est fonction de x", ou "y est l'image de x par f".

$x \mapsto f(x)$: on s'intéresse au processus, à la règle de calcul. On lit "x se transforme en f(x)".

Exemple :

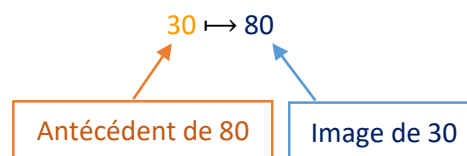
Un transporteur facture 20 € de frais fixes, puis 2 € par kilomètre parcouru.

Le coût total $f(x)$, pour un trajet de x kilomètres, s'écrit : $f(x) = 20 + 2x$, ou encore $x \mapsto 20 + 2x$.

Pour un trajet de 30 km : $f(30) = 20 + 2 \times 30 = 80$ €.

Pour un coût de 100 € : $f(x) = 100$ €, d'où : $20 + 2x = 100$; $2x = 80$; $x = 40$

Dire que : $f(30) = 80$ signifie que :



- L'**image** (y) de 30 par la fonction f est 80.
- Un **antécédent** (x) de 80 par f est 30.

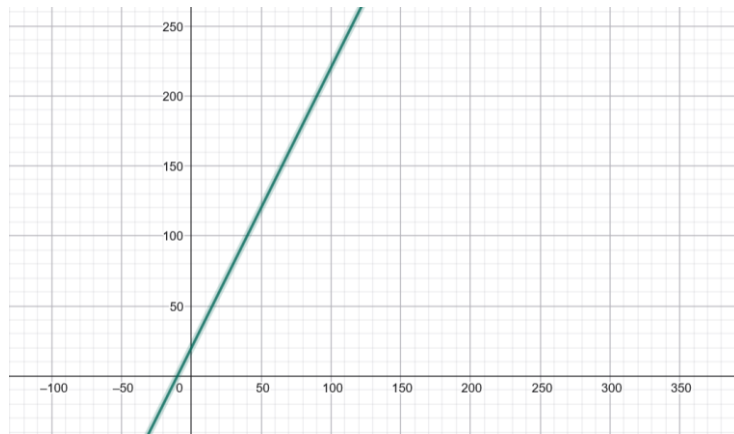
NB : un nombre possède une unique image, cependant, un nombre peut posséder plusieurs antécédents.

1.2. Deux façons de représenter une fonction

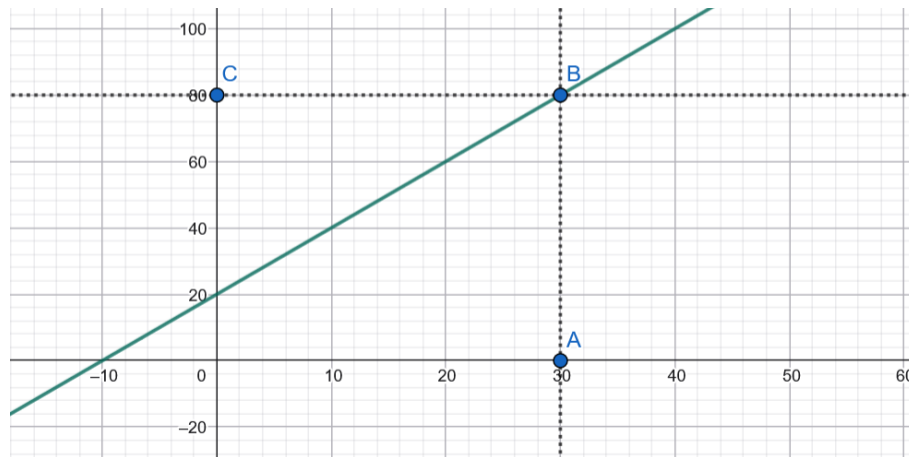
- **L'expression littérale** : une formule, comme $f(x) = 20 + 2x$, qui permet de calculer $f(x)$ pour n'importe quel x .

- **La représentation graphique** : une courbe tracée dans un repère, où chaque point a pour coordonnées $(x ; f(x) / y)$. Contrairement à une suite, ici x peut prendre toutes les valeurs réelles d'un intervalle : la courbe est donc continue (on peut la tracer sans lever le crayon).

x	0	2	5	10	50	100	150
$f(x) / y$	20	24	30	40	120	220	320



Dans le cas d'une fonction affine : $f(x) = 20 + 2x$



Méthode à retenir lors de la lecture de l'image et de l'antécédent sur un graphique :

- **$f(a) = ?$** → on part de $x = a$ **en abscisse**, on monte/descend jusqu'à la courbe, on lit l'**ordonnée**.
 - $f(30) = ?$
 - $f(30) = 80$ (point C du graphique).

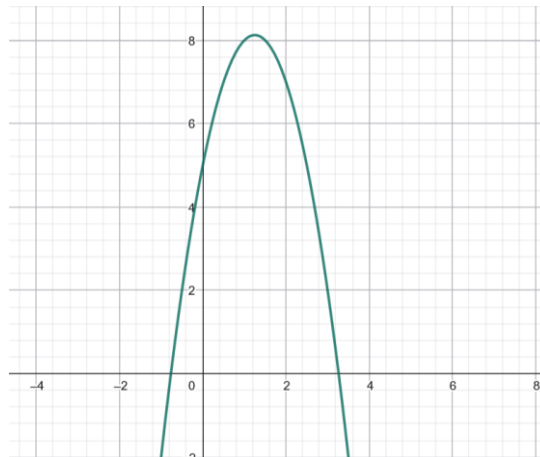
Il est aussi possible de résoudre via l'équation, si on ne possède pas de graphique :

- $f(30) = 20 + 2 \times 30 = 80$
- **Antécédents de b** → on part de $y = b$ **en ordonnée**, on trace une horizontale, on regarde **toutes** les intersections avec la courbe, et pour chacune on lit l'abscisse correspondante (il peut y en avoir 0, 1, ou plusieurs, contrairement à l'image qui est toujours unique).
 - $f(x) = 80$
 - $x = 30$ (point A du graphique)

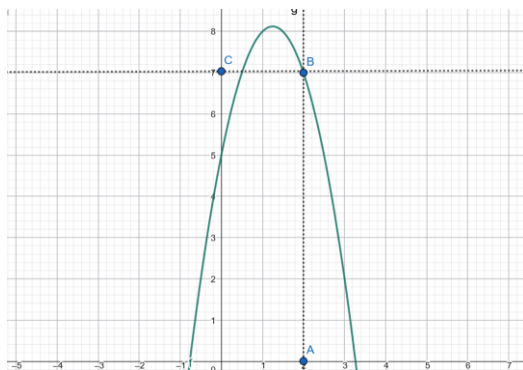
Il est aussi possible de résoudre via l'équation, si on ne possède pas de graphique :

- $f(x) = 20 + 2x$ et $f(x) = 80 \Rightarrow 20 + 2x = 80 \Rightarrow x = 30$

Dans le cas d'une équation du second degré : $f(x) = -2x^2 + 5x + 5$



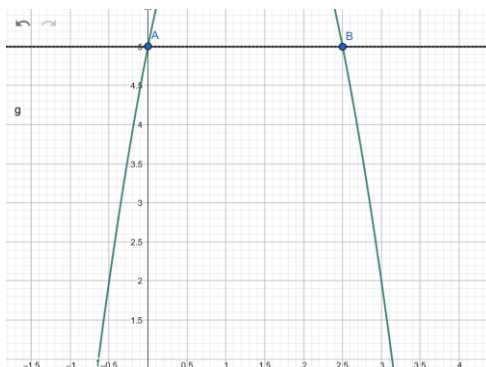
• Lecture de l'image : $f(2)$



$f(2)$

$f(2) = 7$ (point C du graphique).

• Lecture des antécédents : $f(x) = 5$



$f(x) = 5$

Par lecture graphique, on voit que l'ordonnée 5, « rejoint » la courbe et on lit les solutions sur l'axe des abscisses : $x = 0$ et $x = 2,5$. On peut noter : $S = \{0 ; 2,5\}$.

Bon à savoir : résoudre $f(x) < k$ (ou $f(x) > k$), c'est repérer la partie de la courbe qui se trouve en dessous (ou au-dessus) de cette droite. On ne parlera pas d'équation mais d'inéquation.

2. Le taux de variation : mesurer une évolution

Entre deux valeurs a et b de la variable x (avec $a \neq b$), le taux de variation de la fonction f mesure de combien varie y en moyenne pour chaque unité de x parcourue.

$$\text{Taux de variation entre } a \text{ et } b = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Interprétation géométrique :

Le taux de variation de f entre a et b est la pente de la droite passant par les points d'abscisses a et b de la courbe de f .

Exemple :

Le chiffre d'affaires d'une entreprise est $f(x)$, x étant l'année. On a $f(2024) = 180\,000$ € et $f(2027) = 210\,000$ €.

Taux de variation entre 2024 et 2027 : $(210\,000 - 180\,000) / (2027 - 2024) = 30\,000 / 3 = 10\,000$.
En moyenne, le chiffre d'affaires augmente de 10 000 € par an sur cette période.

Exemple :

Un transporteur facture 20 € de frais fixes, puis 2 € par kilomètre parcouru.

Le coût total $f(x)$, pour un trajet de x kilomètres, s'écrit : $f(x) = 2x + 20$.

Pour cette fonction, c'est un cas particulier très pratique : **la pente est directement lisible dans l'écriture de la fonction**, sans même avoir besoin de calculer un taux de variation entre deux points.

$f(x) = 2x + 20$ est une fonction affine, de la forme $f(x) = ax + b$, avec :

- **$a = 2$** (le coefficient de x) $\rightarrow$ c'est la **pente** (ou coefficient directeur)
- **$b = 20$** $\rightarrow$ c'est l'ordonnée à l'origine (la valeur quand $x = 0$, ici les frais fixes)

Vérification par le calcul du taux de variation :

Prenons deux valeurs quelconques, par exemple $a = 10$ et $b = 30$:

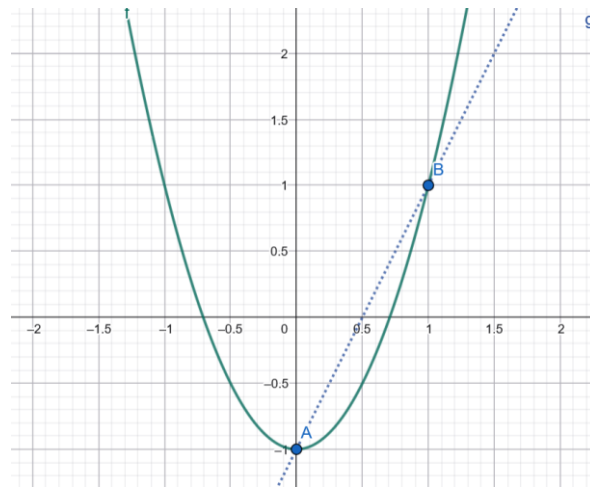
- $f(10) = 20 + 2 \times 10 = 40$ €
- $f(30) = 20 + 2 \times 30 = 80$ €

Taux de variation entre 10 et 30 :

$$(f(30) - f(10)) / (30 - 10) = (80 - 40) / 20 = 40/20 = 2$$

Pour le cas d'une équation au second degré : $f(x)=2x^2 - 1$

Déterminer le taux de variation entre $a = 0$ et $b = 1$.



- $f(0) = 2 \times 0^2 - 1 = -1$
- $f(1) = 2 \times 1^2 - 1 = 1$

Taux de variation entre 0 et 1 :

$$(f(1) - f(0)) / (1 - 0) = (1 - (-1)) / 1 = 2/1 = 2$$

Contrairement à la fonction affine vue plus tôt ($f(x) = 20 + 2x$, où la pente était toujours 2 partout), ici f est une fonction **du second degré** : le taux de variation n'est **pas constant**.

3. Fonctions monotones

Le signe du taux de variation renseigne directement sur le sens d'évolution de la fonction sur un intervalle :

Si le taux de variation est positif sur un intervalle, alors f est croissante sur cet intervalle : y augmente quand x augmente.

Si le taux de variation est négatif sur un intervalle, alors f est décroissante sur cet intervalle : y diminue quand x augmente.

On dit qu'une fonction est monotone sur un intervalle lorsqu'elle est soit toujours croissante, soit toujours décroissante sur cet intervalle (elle ne change pas de sens de variation).

4. Les fonctions polynômes du second degré : la parabole

Une **fonction polynôme du second degré** (ou "fonction trinôme") s'écrit sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a , b et c sont des nombres réels, avec $a \neq 0$ (sinon ce ne serait qu'une droite). Sa représentation graphique est une **parabole**.

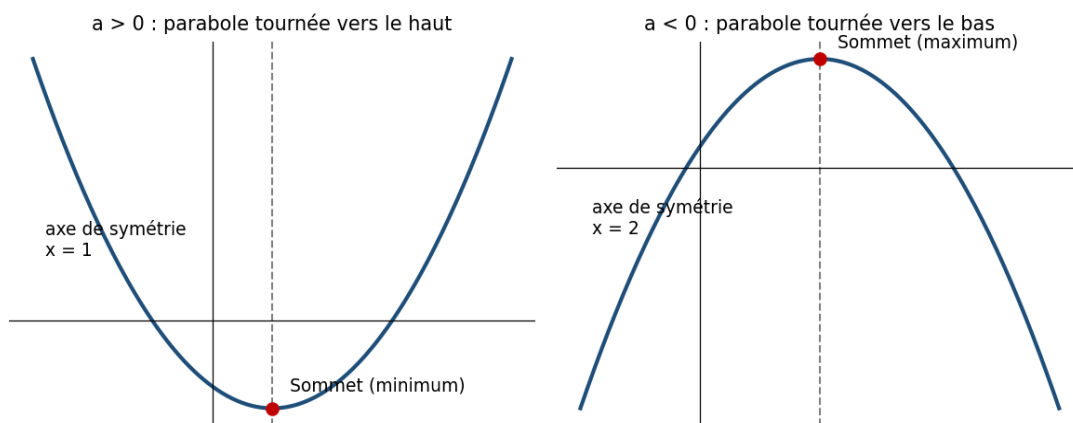
4.1. Trois écritures pour une même parabole

Forme développée : $f(x) = ax^2 + bx + c$

Formes simples : $x \mapsto ax^2$ ou $x \mapsto ax^2 + c$ (parabole centrée sur l'axe des ordonnées, simplement translatée verticalement de c)

Forme factorisée : $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$, où x_1 et x_2 sont les racines de f

Chaque parabole possède un **axe de symétrie** (une droite verticale) et un **sommet** (le point de la courbe situé sur cet axe). Le signe de a détermine l'allure de la courbe :



- Si $a > 0$: la parabole est tournée vers le haut ("en U"). Le sommet est un minimum.

- Si $a < 0$: la parabole est tournée vers le bas ("en cloche"). Le sommet est un maximum.

4.2. Détermination de l'axe de symétrie

Aucune formule n'est exigée pour trouver l'axe de symétrie :

- le sommet de la courbe se trouve à l'intersection de l'axe de symétrie avec la courbe.
- on peut le déterminer en résolvant un antécédent de l'équation $f(x) = c$ (les deux solutions obtenues, autres que 0, sont symétriques par rapport à l'axe ; leur milieu donne l'abscisse de l'axe).

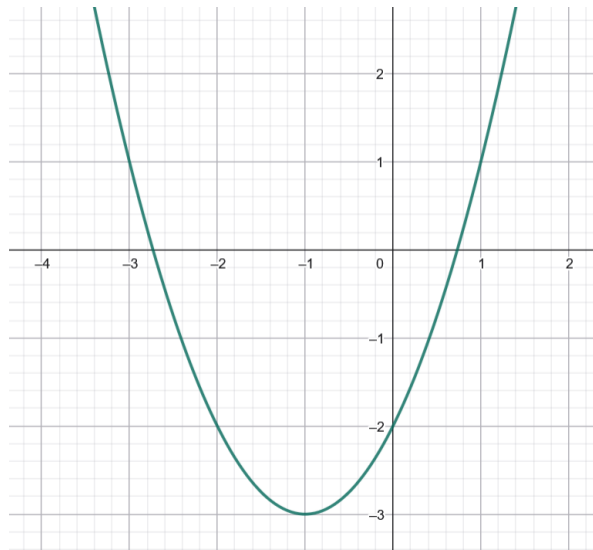
Exemple :

$$f(x) = x^2 + 2x - 2$$

Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = -2$.

Tracer l'axe de symétrie de la courbe.

Donner les coordonnées du sommet de la courbe.



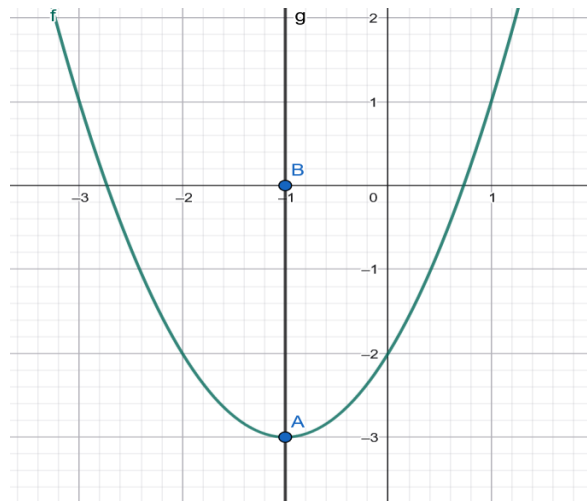
Les solutions de l'équation $f(x) = -2$ sont $x = -2$ et $x = 0$.

L'axe de symétrie de la courbe est la droite verticale qui coupe l'axe des abscisses en -1 (via graphique ou $(-2 + 0)/2 = -1$)

Le sommet est à l'intersection de l'axe de symétrie avec la courbe. Donc son abscisse est -1.

Son ordonnée est : $f(-1) = (-1)^2 + 2 \times (-1) - 2 = -3$

Les coordonnées du sommet sont donc : $(-1 ; -3)$.



5. Tableau de variation, factorisation et signe

5.1. Tableau de variation

Le tableau de variation résume en un « coup d'œil » **tout le comportement d'une fonction** sur son ensemble de définition : où elle monte, où elle descend, et quelles sont ses valeurs extrêmes (maximum/minimum).

Si on travaille avec une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Si $a > 0$:

x	$-\infty$	p	$+\infty$
$f(x)$			

Si $a < 0$:

x	$-\infty$	p	$+\infty$
$f(x)$			

L'axe de symétrie de la courbe est la droite verticale qui coupe l'axe des abscisses en p .

Son sommet est le point de coordonnées $(p ; q)$.

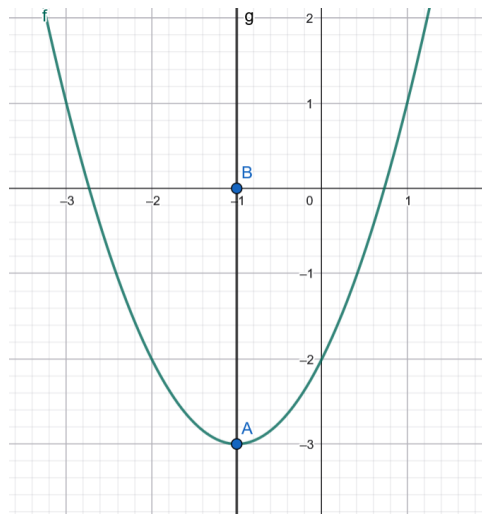
Exemple :

$$f(x) = x^2 + 2x - 2$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$			

Le point de coordonnées $(-1 ; -3)$ est le sommet A de la courbe.

L'axe de symétrie est la droite verticale qui coupe l'axe des abscisses en -1 .



Comment le lire

- f décroît de $+\infty$ à -3 sur $]-\infty ; -1]$
- f croît de -3 à $+\infty$ sur $[-1 ; +\infty[$
- Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est -3 , atteint en $x = -1$

5.2. Factoriser de l'équation du second degré

Pour factoriser les polynômes du second degré ($ax^2 + bx + c$) plusieurs techniques sont possibles (racine évidente connue, somme et produit des racines, Le discriminant ($\Delta = b^2 - 4ac$)). Au sein du programme de 1^{ère} STMG, on se focalise sur la 1^{ère} méthode.

Racine évidente connue :

On teste des valeurs simples (0, 1, -1, 2...), puis on trouve la seconde racine par identification.

On va commencer par **vérifier qu'une valeur est bien une racine**.

Une **racine** (ou "zéro") d'un polynôme f est une valeur de x pour laquelle $f(x) = 0$: c'est l'abscisse d'un point où la courbe coupe l'axe des abscisses.

Il suffit de remplacer x par cette valeur dans $f(x)$ et de vérifier que le résultat est 0.

Astuce pratique : si la somme des coefficients ($a + b + c$) est nulle, alors **$x = 1$ est toujours racine** (car $f(1) = a + b + c$). Si $a - b + c = 0$, alors **$x = -1$ est toujours racine**. Ce sont les deux premiers réflexes à avoir.

Exemple :

$$f(x) = x^2 - 4x + 3.$$

Est-ce que $x = -1$ est une racine ?

$f(-1) = (-1)^2 - 4 \times (-1) + 3 = 1 + 4 + 3 = 8$. Non, on ne retrouve pas 0.

Est-ce que $x = 1$ est une racine ?

$f(1) = 1^2 - 4 \times 1 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$. Oui, 1 est bien une racine de f .

Dès qu'on connaît une racine x_1 , on peut écrire $f(x)$ sous forme factorisée $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, puis retrouver x_2 en développant cette écriture et en identifiant les coefficients avec la forme de départ.

Suite de l'exemple :

$$f(x) = x^2 - 4x + 3.$$

Une fois une racine x_1 trouvée, on sait que $f(x)$ s'écrit forcément : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, où x_2 est la seconde racine, encore inconnue.

$$\text{Ici : } f(x) = 1 \times (x - 1)(x - x_2) = (x - 1)(x - x_2)$$

$$a(x - x_1)(x - x_2) = a[x^2 - x_2x - x_1x + x_1x_2] = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2]$$

$$= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + a \times x_1x_2$$

$$(x - 1)(x - x_2) = x^2 - x_2x - x + x_2 = x^2 - (1 + x_2)x + x_2$$

Enfin, le coefficient de x donne une équation, le terme constant en donne une seconde (qui sert de vérification) :

- $-a(x_1 + x_2) = b \rightarrow$ permet de calculer x_2
- $a \times x_1 \times x_2 = c \rightarrow$ sert à vérifier le résultat

Par identification avec $x^2 - 4x + 3$:

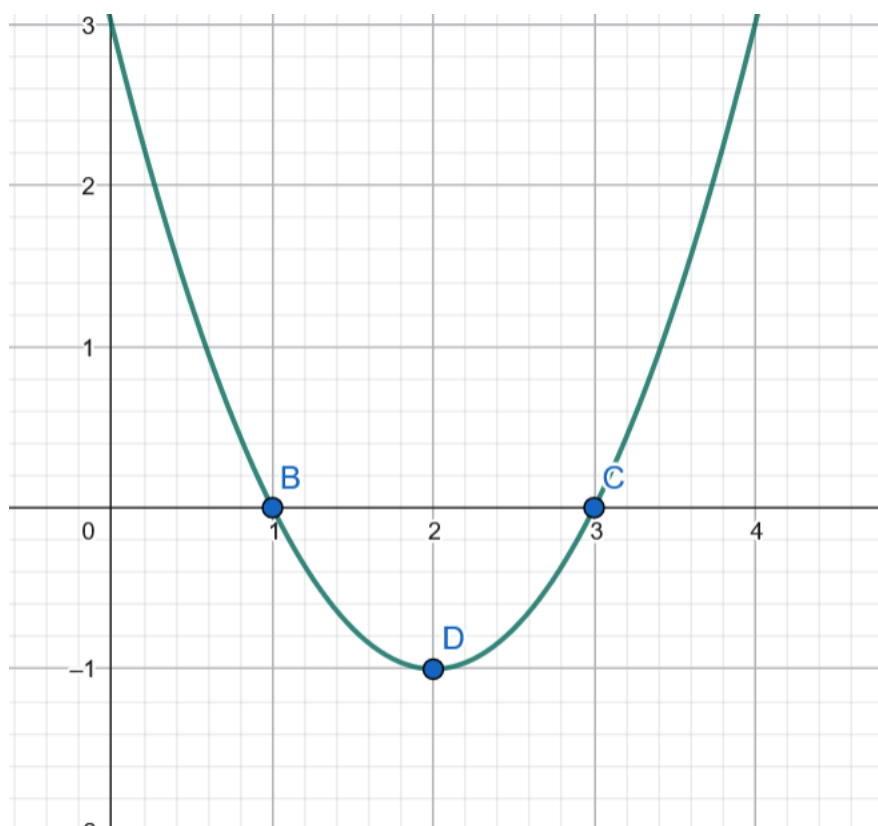
$$-(1 + x_2) = -4, \text{ soit } 1 + x_2 = 4 \rightarrow x_2 = 3$$

Vérification sur le terme constant : $1 \times 3 = 3 \checkmark$ (cohérent avec $c = 3$)

Conclusion : $f(x) = (x - 1)(x - 3)$

5.3. Étudier le signe grâce à la forme factorisée

Une fois $f(x)$ écrite sous forme $a(x - x_1)(x - x_2)$, on étudie le signe de chaque facteur séparément, puis on applique la règle des signes d'un produit (un produit est positif si ses deux facteurs sont de même signe, négatif sinon).



- $(x - 1)$ s'annule en $x = 1$: négatif avant, positif après
- $(x - 3)$ s'annule en $x = 3$: négatif avant, positif après

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x - 1$		-	0	+		+	
$x - 3$		-		-	0	+	
$f(x) = (x-1)(x-3)$		+	0	-	0	+	

6. Cas pratique de synthèse

Énoncé : Une entreprise vend un produit. Son bénéfice mensuel, exprimé en **milliers d'euros**, est modélisé par la fonction :

$$\text{Bénéfice}(x) = -2x^2 + 40x - 150$$

où x est la quantité vendue, exprimée en **centaines d'unités**.

1. Identifier la fonction et le sens.
2. Vérifier que $x_1 = 5$ et $x_2 = 15$ sont racines.
3. Écrire la forme factorisée.
4. Déterminer le sommet.
5. Étudier le signe (la zone rentable).

Correction :

1. Identifier la fonction et le sens.

C'est une fonction polynôme du second degré, avec $a = -2$ (négatif) : la parabole est donc tournée vers le bas.

2. Vérifier que $x_1 = 5$ et $x_2 = 15$ sont racines.

$$\text{Bénéfice}(5) = -2 \times 25 + 200 - 150 = -50 + 200 - 150 = 0.$$

$$\text{Bénéfice}(15) = -2 \times 225 + 600 - 150 = -450 + 600 - 150 = 0. \text{ Les deux valeurs sont bien des racines.}$$

3. Écrire la forme factorisée.

(le sujet donne les 2 racines...).

$$\text{Bénéfice}(x) = -2(x - 5)(x - 15).$$

4. Déterminer le sommet.

L'axe de symétrie est à mi-chemin entre 5 et 15, soit $x = 10$.

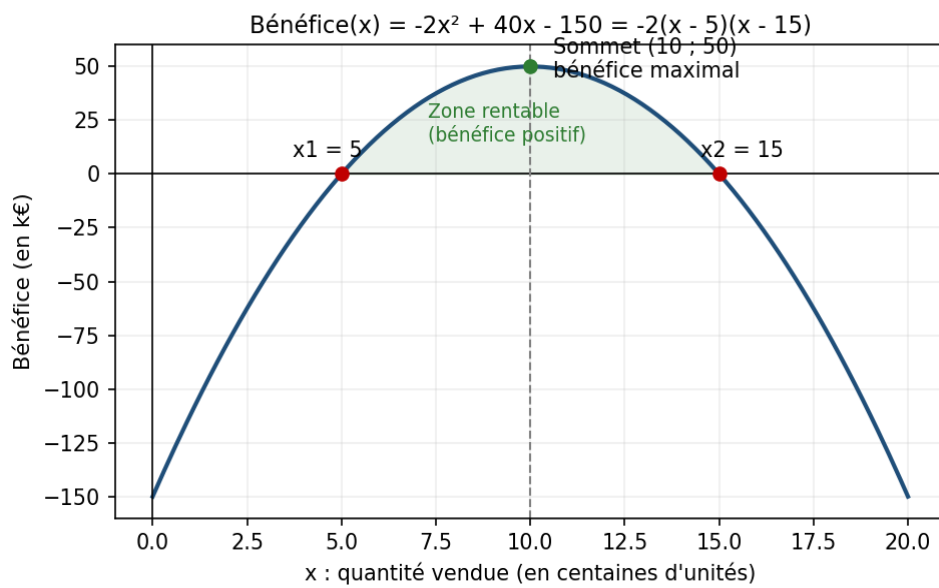
$\text{Bénéfice}(10) = -2 \times 100 + 400 - 150 = 50$. Le sommet est donc (10 ; 50) : c'est le bénéfice maximal, atteint pour 10 unités vendues.

5. Étudier le signe (la zone rentable).

D'après la règle des signes et la forme factorisée, $\text{Bénéfice}(x)$ est positif entre les deux racines, donc pour x compris entre 5 et 15.

- -2 : négatif, il **inverse** le signe global du produit.
- $(x - 5)$ s'annule en $x = 5$: négatif avant, positif après
- $(x - 15)$ s'annule en $x = 15$: négatif avant, positif après

x	$-\infty$		5		15		$+\infty$
$(x - 5)$		-	0	+		+	
$(x - 15)$		-		-	0	+	
$(x-5)(x-15)$		+	0	-	0	+	
$-2x^2 + 40x - 150$		-	0	+	0	-	



Conclusion : l'entreprise est rentable pour une quantité vendue comprise entre 5 et 15 avec un bénéfice maximal de 50 000 € atteint pour 1 000 unités vendues.