

Chapitre 8 - Probabilités conditionnelles et indépendance

Table des matières

1. Les bases : Issues et Événements.....	2
2. La distinction entre réunion et intersection	2
3. Probabilités marginales vs conditionnelles	3
4. L'arbre pondéré : Le GPS des probabilités	4
5. L'indépendance.....	5

1. Les bases : Issues et Événements

Imagine une expérience aléatoire (le hasard).

- **L'Issue** : C'est un résultat possible (ex: sur un dé, le "4" est une issue).
- **L'Événement** : C'est une condition que l'on fixe (ex: "Obtenir un nombre pair"). Ce nombre est un réel compris entre 0 et 1.

Lorsque A est impossible, alors $p(A) = 0$. Lorsque A est certain, alors $p(A) = 1$. Si A est un événement, alors on note $\bar{A}$ l'événement contraire de A. On a alors $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

- **La Probabilité** : C'est le nombre de chances que l'événement se réalise.

$$P(A) = \frac{\text{Nombre d'issues favorables}}{\text{Nombre total d'issues}}$$

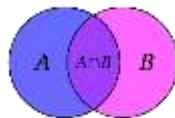
Exemple : le contrôle qualité. On prélève une pièce dans un lot de 100. **L'Issue** : La pièce est "Conforme" ou "Non-conforme".

Calcul : S'il y a 5 pièces défectueuses sur 100, la probabilité de tirer une pièce non-conforme est $P = 5/100 = 0,05$ (soit 5%).

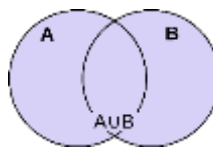
2. La distinction entre réunion et intersection

C'est le vocabulaire pour combiner des groupes.

- **Intersection ($A \cap B$)** : C'est le "ET". Cela se lit « A inter B ». L'individu doit être dans A **et** dans B en même temps.



- **Réunion ($A \cup B$)** : C'est le "OU". Cela se lit A union B. L'individu est soit dans A, soit dans B, soit dans les deux.



$$P_{A \cup B} = P_A + P_B - P_{A \cap B}$$

Par exemple, on retrouve 1,2,3 au sein de A ; 4,5,6 au sein de B et 7 et 8 à l'intérieur de l'intersection A et B.

$$P_{A \cup B} = 1,2,3,7,8 + 4,5,6,7,8 - 7,8 = 1,2,3,4,5,6,7,8$$

La distinction entre réunion et intersection, c'est un outil idéal pour segmenter une clientèle ou une base de données.

Exemple : On analyse le fichier client d'une banque.

- A : "Le client a un livret A".
- B : "Le client a un prêt immobilier".

$(A \cap B)$: Le client a **les deux**. C'est le client fidèle et multi-équipé. $(A \cup B)$: Le client a **soit** un livret, **soit** un prêt, **soit** les deux.

3. Probabilités marginales vs conditionnelles

En gestion, on utilise souvent des tableaux croisés.

1. **Probabilité Marginale (Le Total) :** On regarde le total dans la "marge" du tableau.

	Atelier A	Atelier B	Total
Pièce Conforme	450	430	880
Pièce Défectueuse	50	70	120
Total	500	500	1000

Exemple : Probabilité qu'une pièce soit défectueuse ? $120 / 1000 = 0,12$; 12%.

2. **Probabilité Conditionnelle (Le sous-groupe) :** On sait déjà quelque chose (le "sachant que"). On ne regarde plus tout le tableau, mais **une seule ligne ou colonne**.

Exemple : **Sachant que** la pièce vient de l'Atelier B, quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse ?

On ne regarde **que** la colonne Atelier B. $P = 70 / 500 = 0,14$; 14%.

4. L'arbre pondéré : Le GPS des probabilités

L'arbre permet de décomposer une expérience en plusieurs étapes.

- **Règle 1** : On multiplie les probabilités le long d'un chemin (pour le "ET").
- **Règle 2** : On additionne les résultats des différents chemins (pour le "OU").

Exemple :

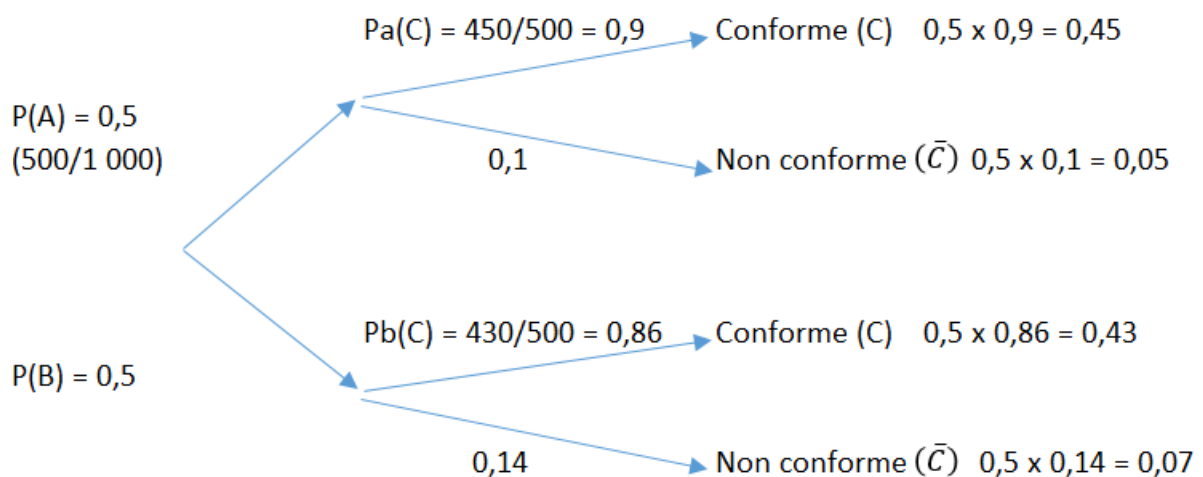
	Atelier A	Atelier B	Total
Pièce Conforme	450	430	880
Pièce Défectueuse	50	70	120
Total	500	500	1000

On considère les événements suivants :

A : « la pièce conforme provient de l'atelier A »

B : « la pièce conforme provient de l'atelier de l'atelier B »

C : « la pièce prélevée est défectueuse »



5. L'indépendance

Deux événements sont indépendants si le fait que l'un se produise ne change rien aux chances de l'autre.

Le test mathématique : A et B sont indépendants SI ET SEULEMENT SI :

$$P_B(A) = P(A) \text{ ce qui est équivalent à } P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Si le calcul tombe juste, alors ils n'ont aucune influence l'un sur l'autre.

C'est ce qui permet de savoir si deux phénomènes sont liés (ex: la météo et la vente de glaces).

Exemple :

Si la probabilité qu'une machine tombe en panne est de 0,1 et que celle d'une deuxième machine est de 0,1. Si elles sont indépendantes, la probabilité que les deux tombent en panne en même temps est de $0,1 \times 0,1 = 1\%$.