

Chapitre 3- Dérivation

Table des matières

Chapitre 3 - Dérivation.....	1
1. Les formules face à une fonction dérivée	2
1.1. Fonctions dérivées des fonctions usuelles.....	2
1.2. Opérations sur les fonctions dérivées	2
2. Analyse des variations et extremums	3

1. Les formules face à une fonction dérivée

La dérivée d'une fonction f en un point traduit la pente de la tangente à la courbe en ce point. En gestion, elle permet de mesurer la **vitesse de variation** d'une grandeur (coût, CA, etc.).

1.1. Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Fonction :	Fonction dérivée :
$f(x) = k$ (constante)	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n x^{n-1}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$

Exemple :

La dérivation permet d'étudier la variation marginale d'une grandeur économique. Elle est indispensable pour calculer le coût marginal ou la recette marginale.

Soit une fonction de coût total $C(x)=0,5x^2+10x+500$.

- Le terme $0,5x^2$ devient $0,5 \times 2x = 1x$.
- Le terme $10x$ devient 10.
- La constante 500 devient 0.

Résultat : La dérivée (coût marginal) est **$C'(x)=x+10$** .

1.2. Opérations sur les fonctions dérivées

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un même intervalle I . On admettra les résultats suivants :

	f	f'
Somme	$u + v$	$u' + v'$
Produit par un réel constant	$k.u$	$k.u'$

2. Analyse des variations et extremums

Pour étudier les variations d'une fonction simple, on suit le procédé suivant :

1. **Calculer la dérivée** $f'(x)$.
2. **La ou les valeurs annulant la dérivée.**
3. **Étudier le signe de $f'(x)$:**
 - Si $f'(x) > 0$, alors f est croissante.
 - Si $f'(x) < 0$, alors f est décroissante.
4. **Dresser le tableau de variation** pour identifier les extremums (maximum ou minimum).

Exemple :

Pour une fonction de bénéfice $B(x) = -2x^2 + 80x - 200$

Calcul de la dérivée : $B'(x) = -4x + 80$.

Recherche de la valeur critique (annulation de la dérivée) :

$$-4x + 80 = 0 \Rightarrow 4x = 80 \Rightarrow x = 20.$$

Étude du signe :

- Si $x < 20$, $B'(x)$ est positif.
- Si $x = 20$, $B'(x)$ est = 0 (point critique)
- Si $x > 20$, $B'(x)$ est négatif.

x	$-\infty$	20	$+\infty$
Signe de $B'(x)$	+	0	-
Variations de B	$\nearrow$	Max(600)	$\searrow$

Valeur du maximum :

$$B(20) = -2x(20)^2 + 80x(20) - 200 = 600$$

Le bénéfice **augmente** tant que la quantité produite/vendue x est inférieure à 20. Le bénéfice **atteint son maximum de 600** lorsque $x = 20$.

Au-delà de $x = 20$, le bénéfice **diminue** (la fonction étant une parabole tournée vers le bas, cela correspond typiquement à une situation où produire/vendre davantage augmente trop les coûts, ou fait chuter les prix, par rapport aux gains supplémentaires).