

Chapitre 6 - Fonctions de référence

Table des matières

1.	La fonction affine	2
2.	La fonction du second degré.....	3
3.	La fonction logarithme.....	5
4.	La fonction exponentielle	6

1. La fonction affine

Les fonctions affines modélisent des situations à **croissance ou décroissance constante**. En comptabilité, elles permettent de formaliser les structures de coûts linéaires (charges semi-variables) ou les plans d'amortissement linéaire.

Une fonction affine f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax + b$$

- a est le **coefficient directeur** (ou taux de variation). Il mesure la pente de la droite représentant la fonction.
- b est l'**ordonnée à l'origine**. Graphiquement, elle correspond au point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées.
- **Sens de variation** : Si $a > 0$, f est strictement croissante. Si $a < 0$, f est strictement décroissante. Si $a = 0$, f est constante.

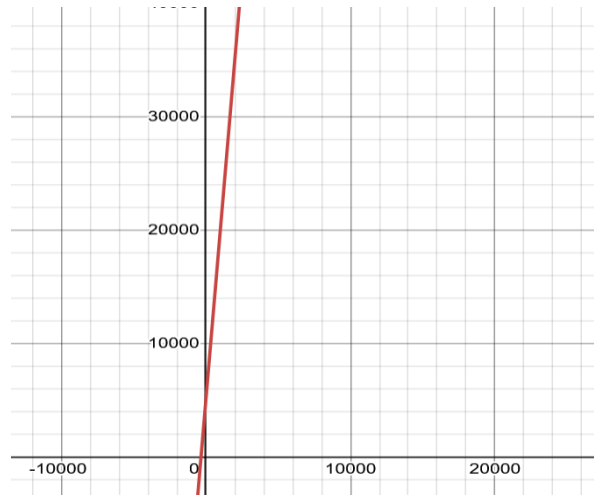
Exemple :

Une entreprise de plasturgie fabrique des boîtiers électroniques. Les charges fixes mensuelles de structure (loyer, assurances, abonnements) s'élèvent à 5 000 €. Le coût variable de fabrication unitaire de chaque boîtier est estimé à 15 €.

1. *Déterminer la fonction.*
2. *Calculer le coût de production pour une production de 800 produits.*

Correction :

Si l'on note x le nombre de boîtiers produits sur un mois, le coût total de production $C(x)$ est modélisé par la fonction affine : $C(x) = 15x + 5\,000$



Pour une production mensuelle de 800 unités, le coût total de production sera de :

$$C(800) = (15 \times 800) + 5\,000 = 12\,000 + 5\,000 = 17\,000 \text{ €}.$$

Le coefficient directeur (15) représente le coût variable unitaire, tandis que l'ordonnée à l'origine (5 000) correspond au montant incompressible des charges fixes.

2. La fonction du second degré

Le second degré intervient dès lors qu'il existe des relations non-linéaires, typiquement dans la modélisation de la recette globale (lorsque le prix baisse avec la quantité demandée) ou dans l'étude et l'**optimisation du bénéfice** (recherche d'un profit maximum).

Une fonction du second degré f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ (avec } a \neq 0\text{)}$$

Pour déterminer l'allure graphique de la courbe (parabole) et ses racines, on calcule le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Si $\Delta > 0$: Deux solutions réelles (points d'annulation) : $x_1 = (-b - \sqrt{\Delta})/(2a)$ et $x_2 = (-b + \sqrt{\Delta})/(2a)$.
- Si $\Delta = 0$: Une solution unique : $x_0 = -b/(2a)$.
- Si $\Delta < 0$: Aucune racine réelle (la courbe ne coupe pas l'axe des abscisses).
- **Extremum (Sommet de la parabole)** : Le sommet est atteint pour $x = \alpha = -b/(2a)$. Si $a < 0$, f admet un maximum (idéal pour le bénéfice) ; si $a > 0$, f admet un minimum (idéal pour l'étude d'un coût moyen).

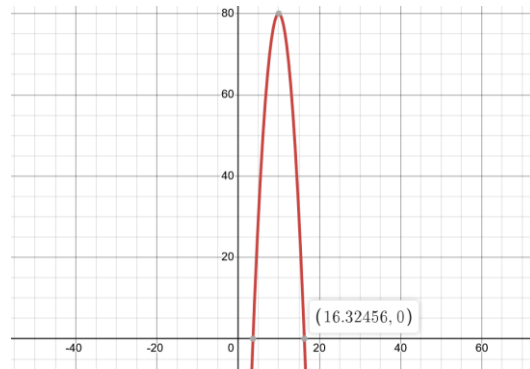
Exemple :

Le bénéfice mensuel $B(x)$ réalisé par un fabricant de matériel de sport pour la vente de x milliers d'articles est modélisé par la fonction :

$B(x) = -2x^2 + 40x - 120$ (exprimé en milliers d'euros, pour x compris entre 2 et 18)

1. Détermination du seuil de rentabilité ($B(x) = 0$) :
2. Détermination du bénéfice maximum (faire le lien avec le chapitre 7 – calcul d'une dérivée)

Correction :



1. Détermination du seuil de rentabilité ($B(x) = 0$) :

Calcul du discriminant : $\Delta = 40^2 - 4 \times (-2) \times (-120) = 1\,600 - 960 = 640$.

$\Delta > 0$, il y a deux solutions : $x_1 = (-40 - \sqrt{640}) / -4 \approx 16,32$ k et $x_2 = (-40 + \sqrt{640}) / -4 \approx 3,68$ k.

L'entreprise réalise un bénéfice positif lorsque sa production est comprise entre 3 680 et 16 320 articles.

$$(-2 \times 3,68^2 + 40 \times 3,68 - 120 = 0)$$

Les chiffres sont arrondis, par exemple $3,68 = 3,67544468$

2. Détermination du bénéfice maximum :

Calcul de la dérivée : $2 \times -2 \times x + 40 = 0 = -4x + 40 = 0$

D'où $x = 40/4 = 10$

Le bénéfice est maximal pour 10 000 articles vendus, et ce bénéfice s'élève à :

$$B(10) = -2(10)^2 + 40(10) - 120 = -200 + 400 - 120 = 80 \text{ milliers d'euros (soit 80 000 €).}$$

3. La fonction logarithme

La fonction logarithme népérien, notée **ln**, est l'outil indispensable pour analyser les taux de croissance à long terme ou pour résoudre des équations financières où l'inconnu (souvent le temps n) se situe en exposant.

Définie uniquement sur $]0 ; +\infty[$, la fonction $\ln$ possède des propriétés de contraction remarquables permettant de transformer les produits en sommes :

- $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln(a / b) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^n) = n \times \ln(a)$ (Propriété clé pour isoler une durée d'investissement)
- Valeurs remarquables : $\ln(1) = 0$; $\ln(e) = 1$ (où $e \approx 2,718$).

Exemple :

Un responsable comptable décide de placer un excédent de trésorerie de 10 000 € sur un support de placement rémunéré au taux annuel de 4% à intérêts composés. On cherche à déterminer au bout de combien d'années n le capital disponible dépassera 20 000 € (doublement du capital initial).

La valeur du capital après n années est de : $V(n) = 10\,000 \times (1,04)^n$.

Nous devons résoudre l'inéquation : $10\,000 \times (1,04)^n \geq 20\,000 \Rightarrow (1,04)^n \geq 2$.

En appliquant la fonction logarithme de chaque côté pour extraire l'exposant : $\ln((1,04)^n) \geq \ln(2) \Rightarrow n \times \ln(1,04) \geq \ln(2)$

Puisque $1,04 > 1$, $\ln(1,04)$ est positif, le sens de l'inéquation ne change pas : $n \geq \ln(2) / \ln(1,04) \Rightarrow n \geq 0,6931 / 0,0392 \Rightarrow n \geq 17,67$ ans.

Conclusion : Le capital aura doublé lors de la 18ème année de placement.

4. La fonction exponentielle

La fonction exponentielle modélise les évolutions dont la variation est proportionnelle à la valeur de départ (évolutions à taux constant). Elle sert à représenter des croissances d'investissements ou des **phénomènes de dépréciation rapide** de la valeur des immobilisations.

La fonction exponentielle, notée $\exp(x)$ ou e^x , est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien. Elle est strictement positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- **Relation fondamentale** : $e^{(\ln(x))} = x$ (pour $x > 0$) et $\ln(e^x) = x$ (pour tout réel x).
- **Propriétés algébriques** : $e^{a+b} = e^a \times e^b$; $e^{-a} = 1 / e^a$; $(e^a)^n = e^{(a \times n)}$.

Exemple :

Une entreprise fait l'acquisition d'une machine de production pour une valeur de 50 000 €. En raison de l'usure technologique et de l'obsolescence, on estime que la valeur résiduelle $V(t)$ de cet actif (en euros) après t années d'utilisation est modélisée par :

$$V(t) = 50\,000 \times e^{(-0,15 t)}$$

1. Déterminer la valeur de l'actif après 5 ans d'exploitation.
2. Interprétation du coefficient.

Correction :

1. Valeur estimée de l'actif après 5 ans d'exploitation :

$$V(5) = 50\,000 \times e^{(-0,15 \times 5)} = 50\,000 \times e^{(-0,75)} \approx 50\,000 \times 0,47237 = 23\,618,50 \text{ €}.$$

2. Interprétation du coefficient :

Le coefficient de l'exposant $(-0,15)$ indique que la valeur résiduelle du matériel décroît de manière continue au rythme d'environ 15% par an.