Chapitre 7 - Calcul différentiel

Table des matières

1. Rappels sur les formules

La dérivée d'une fonction f en un point traduit la pente de la tangente à la courbe en ce point. En gestion, elle permet de mesurer la **vitesse de variation** d'une grandeur (coût, CA, etc.).

1.1. Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Fonction :	Fonction dérivée :
f(x) = k (constante)	f'(x) = 0
f(x) = x^n	f'(x) = n x^{n-1}
f(x) = x	f(x) = 1
f(x) = x^2	f(x) = $2x$
f(x) = x^3	f(x) = $3x^2$
f(x) = ln x	f'(x) = 1 / x
f(x) = e^X	f'(x) = e^X
f(x) = 1 / x^n	f'(x) = $\frac{-n}{x n+1}$
f(x) = $\sqrt{x}$	f'(x) = $1/2\sqrt{x}$
$f(x) = e^{u(x)}$	f(x)$= u'(x). e^{u(x)}$

Exemple :

La dérivation permet d'étudier la variation marginale d'une grandeur économique. Elle est indispensable pour calculer le coût marginal ou la recette marginale.

Soit une fonction de coût total C(x)=0,5x²+10x+500.

- Le terme 0,5x² devient 0,5×2x=1x.
- Le terme 10x devient 10.
- La constante 500 devient 0.

Résultat : La dérivée (coût marginal) est **C'(x)=x+10.**

En BTS CG, on étudie souvent le coût moyen $\bar{C}$(x)= $\frac{C(x)}{x}$.
Si C(x)=x²+100, alors :

$\bar{C}(x) = \frac{x^2+100}{x} = x + \frac{100}{x}$

Pour dériver x, on obtient 1.

Pour dériver 100 / x, on utilise la formule suivante :

$f(x) = 1 / x^n$	$f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$

On obtient : $-100 \times 1 / x^2$

Résultat : $\bar{C}(x) = =1 - 100/x^2$.

1.2. Opérations sur les fonctions dérivées

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un même intervalle I. On admettra les résultats suivants :

	f	f'
Somme	$u + v$	$u' + v'$
Produit par un réel constant	$k.u$	$k.u'$
Produit de deux fonctions	$u.v$	$u'.v + u.v'$
Carré d'une fonction	u^2	$2u'.u$
Inverse	$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$
Quotient	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

Exemple :

$$f(x) = \frac{5x^2-6x+3}{5x+1}$$

Formule à utiliser :

Quotient	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

Numérateur : $u(x) = 5x^2 - 6x + 3 \Rightarrow u'(x) = 10x - 6$
Dénominateur : $v(x) = 5x + 1 \Rightarrow v'(x) = 5$

$f'(x) = ((10x - 6) \times (5x + 1) - 5 \times (x^2 - 6x + 3)) / (5x + 1)^2$

Développons chaque partie du numérateur :

- **Partie gauche :** $(10x - 6)(5x + 1) = 50x^2 + 10x - 30x - 6 = 50x^2 - 20x - 6$
- **Partie droite :** $5 \times (5x^2 - 6x + 3) = 25x^2 - 30x + 15$

La dérivée de la fonction est :

$f'(x) = (25x^2 + 10x - 21) / (5x + 1)^2$

Au sein du BTS CG, cette méthode est intéressante pour :

- **Étudier les variations** d'une fonction de coût moyen unitaire.
- **Déterminer un éventuel extremum** (par exemple, le niveau de production qui minimise les coûts) en exploitant le tableau de variation.
- **Interpréter le coût marginal**, qui correspond à la valeur de la dérivée du coût total.

Une mise en situation concrète pour valider vos acquis + la correction pas à pas pour ne plus faire d'erreurs (sur le site - shop BTS CG).

2. Analyse des variations et extremums

Pour étudier les variations d'une fonction simple, on suit le procédé suivant :

1. **Calculer la dérivée** $f'(x)$.
2. **La ou les valeurs annulant la dérivée**.
3. **Étudier le signe de $f'(x)$** :
    - Si $f'(x) > 0$, alors f est croissante.
    - Si $f'(x) < 0$, alors f est décroissante.
4. **Dresser le tableau de variation** pour identifier les extremums (maximum ou minimum).

Exemple :

Pour une fonction de bénéfice $B(x) = -2x^2 + 80x - 200$:

Calcul de la dérivée : $B'(x) = -4x + 80$.

Recherche de la valeur critique (annulation de la dérivée) :

$-4x + 80 = 0 \Rightarrow 4x = 80 \Rightarrow x = 20$.

Étude du signe :

- Si $x < 20$, $B'(x)$ est positif.
- Si $x > 20$, $B'(x)$ est négatif.

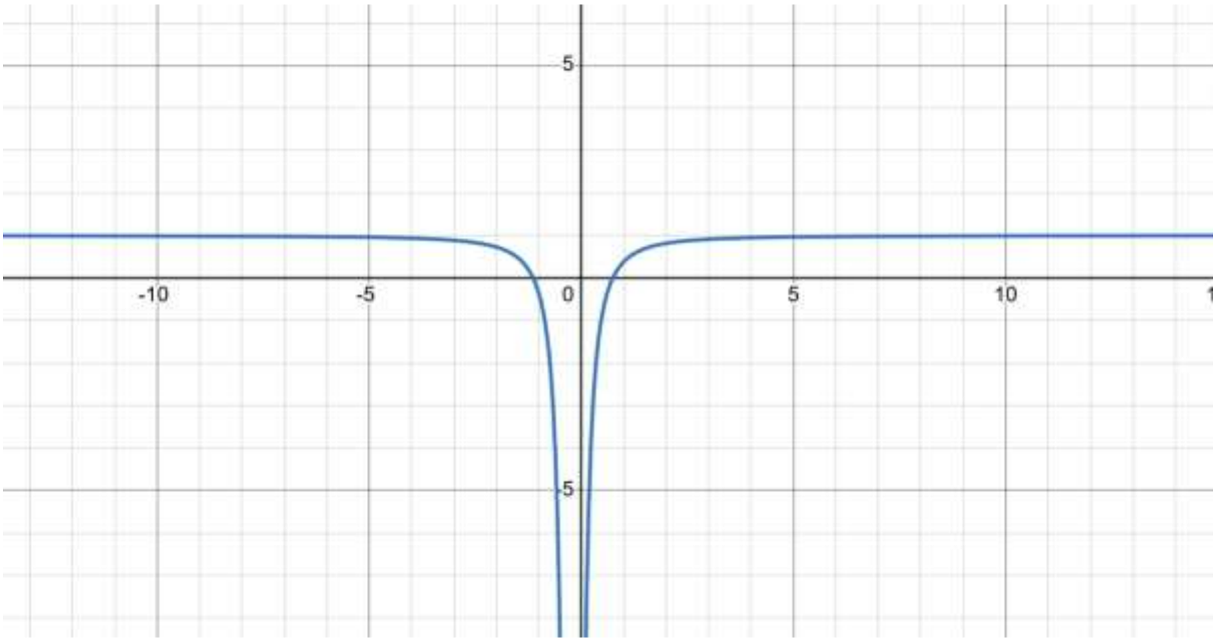
Tableau de variation

x	0	20	50
Signe de B'(x)	+	0	-

Variations de B	↗	Max	↘

Exemple :

Reprenons l'exemple précédent : **f'(x) = (25x² + 10x – 21) / (5x + 1)²**



Étude du signe de la dérivée

- **Le dénominateur :** $(5x + 1)^2$ est toujours positif (en tant que carré).

L'expression est définie tant que le dénominateur $(5x + 1)^2$ n'est pas nul. Cela se produit lorsque $x=-1/5$ (-0,2) $(5x-1/5+1)^2 \Rightarrow 0$.

- **Le numérateur :** C'est un trinôme du second degré $25x^2 + 10x - 21$.

Recherche des racines du numérateur

$\Delta=b^2-4ac=10^2-4x25x(-21)=100+2100=2200$.

Les solutions sont :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-10 \pm \sqrt{2\,200}}{50}$$

Ainsi, les racines sont :

$$Solution\ n°1 = \frac{-10 + \sqrt{2\,200}}{50} \approx 0{,}739$$

$$Solution\ n°2 = \frac{-10 - \sqrt{2\,200}}{50} \approx 0 - 1{,}14$$

Donc, f′(x)=0 en x ≈ 0.739 et x ≈−1.14.

Tableau de variation :

x	−∞	−1,14		−0,2		0,74	+∞
$(25x^2 + 10x - 21)$	+	0	-	-	-	0	+
$(5x + 1)^2$	+		+	0	+	+	+
f'(x)	+	0	-	Valeur absolue	-	0	+